

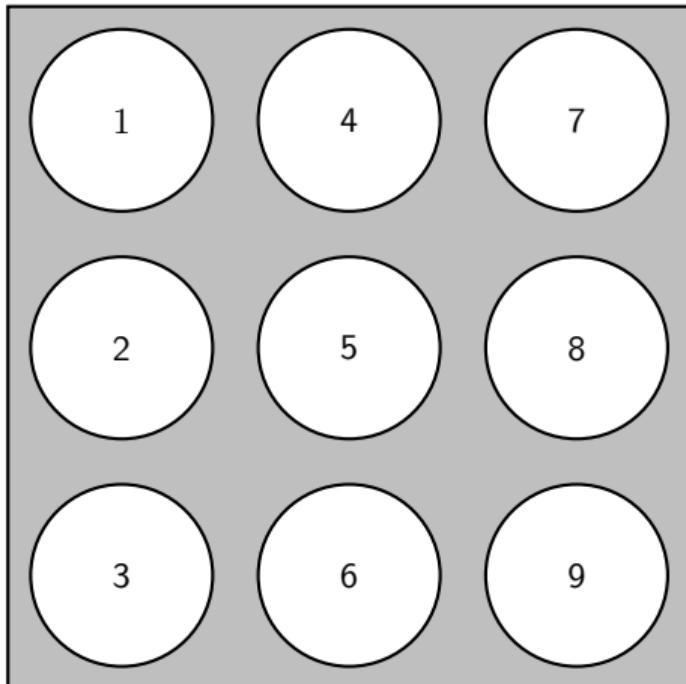
Теория вероятностей и математическая статистика

Условная вероятность. Полная вероятность. Формула Байеса.

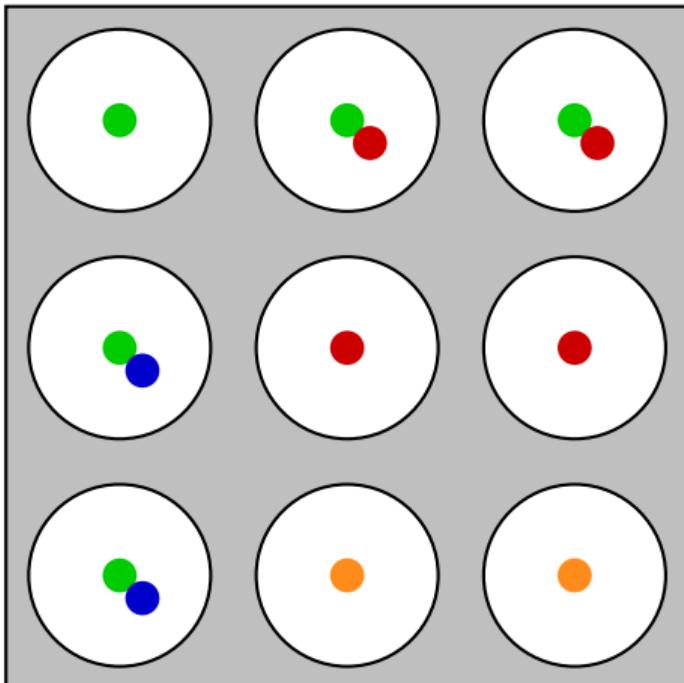
Глеб Карпов

ВШБ Бизнес-информатика

Мыслительный эксперимент

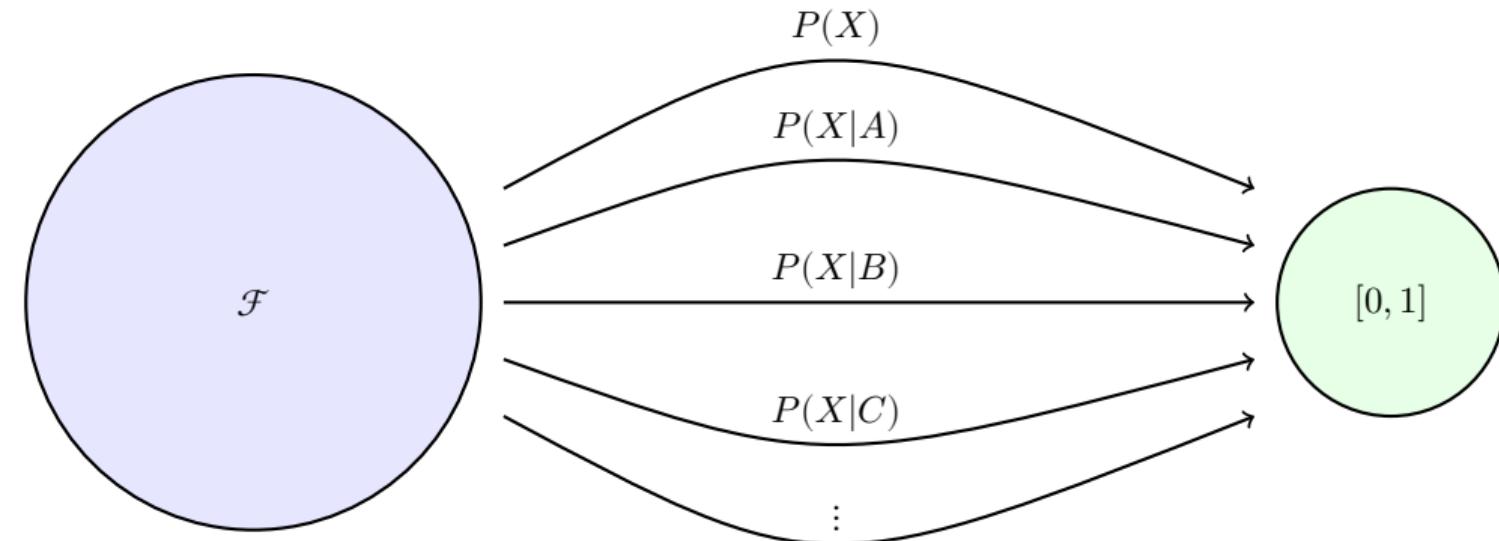


Мыслительный эксперимент



- Зеленая группа: 1,2,3,4,7
- Красная группа: 4,5,7,8
- Синяя группа: 2,3
- Оранжевая группа: 6,9

Условная вероятность



Условная вероятность

• Definition

Условная вероятность пересчитывается через обычную вероятность в виде:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Условная вероятность

Definition

Условная вероятность пересчитывается через обычную вероятность в виде:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Формула Байеса

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

Условная вероятность

При каждом зафиксированном значении параметра (условия) $P(X|K)$ - отдельная самостоятельная вероятностная функция. Для каждой справедливы указанные ранее свойства:

- $\forall X, K \in \mathcal{F} : 0 \leq P(X|K) \leq 1$

Условная вероятность

При каждом зафиксированном значении параметра (условия) $P(X|K)$ - отдельная самостоятельная вероятностная функция. Для каждой справедливы указанные ранее свойства:

- $\forall X, K \in \mathcal{F} : 0 \leq P(X|K) \leq 1$
- $\forall K \in \mathcal{F} : P(\Omega|K) = 1$. Easy to show: $P(\Omega|K) = \frac{P(\Omega \cap K)}{P(K)} = (K \subseteq \Omega) = \frac{P(K)}{P(K)} = 1$

Условная вероятность

При каждом зафиксированном значении параметра (условия) $P(X|K)$ - отдельная самостоятельная вероятностная функция. Для каждой справедливы указанные ранее свойства:

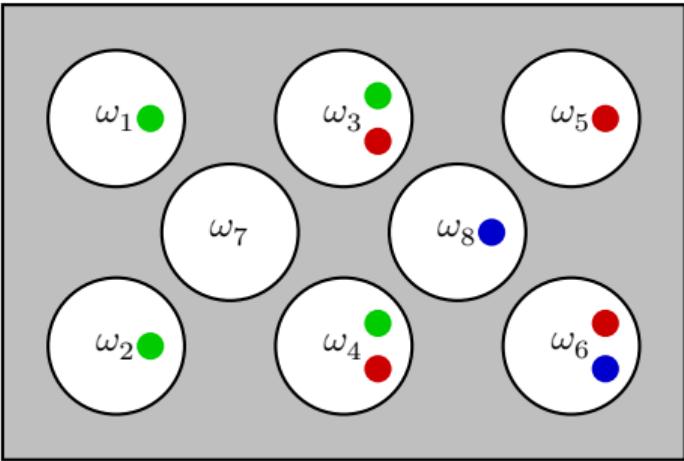
- $\forall X, K \in \mathcal{F} : 0 \leq P(X|K) \leq 1$
- $\forall K \in \mathcal{F} : P(\Omega|K) = 1$. Easy to show: $P(\Omega|K) = \frac{P(\Omega \cap K)}{P(K)} = (K \subseteq \Omega) = \frac{P(K)}{P(K)} = 1$
- Аддитивность вероятности:

$$\forall X, Y, K \in \mathcal{F} : X \cap Y = \emptyset, P((X \cup Y)|K) = P(X|K) + P(Y|K)$$

Независимость событий

- $G = \{1, 2, 3, 4\}$
- $R = \{3, 4, 5, 6\}$
- $B = \{6, 8\}$

- $P(G) = 0.5, P(R) = 0.5, P(B) = 0.25$



Question

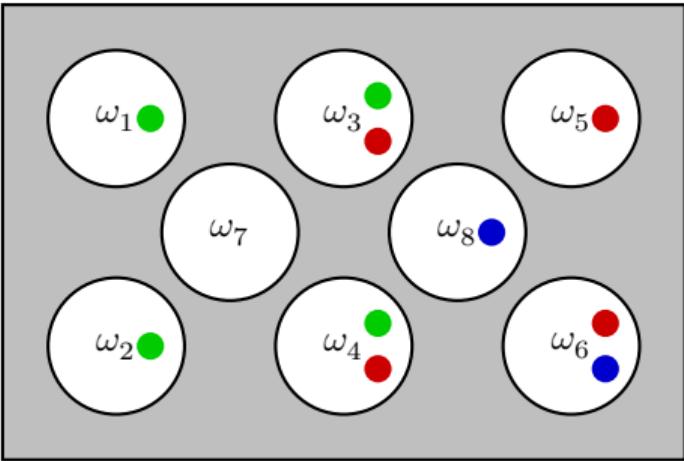
$$P(G|R), P(R|G) = ?$$

Question

$$P(R|B), P(B|R) = ?$$

Независимость событий

- $G = \{1, 2, 3, 4\}$
- $R = \{3, 4, 5, 6\}$
- $B = \{6, 8\}$



- $P(G) = 0.5, P(R) = 0.5, P(B) = 0.25$

Question

$$P(G|R), P(R|G) = ?$$

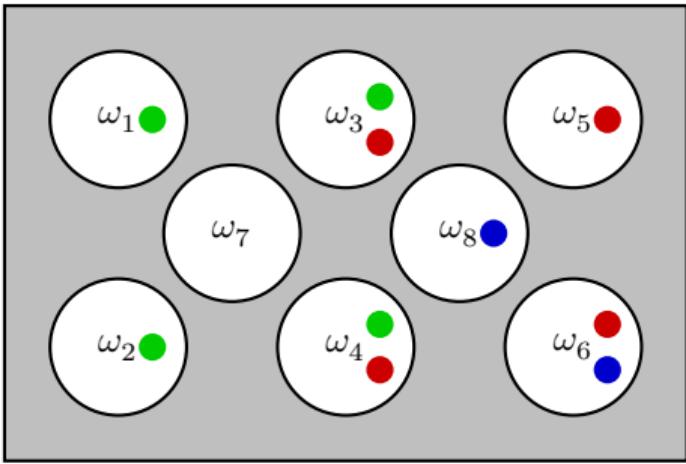
- $P(G|R) = 0.5, P(R|G) = 0.5$

Question

$$P(R|B), P(B|R) = ?$$

Независимость событий

- $G = \{1, 2, 3, 4\}$
- $R = \{3, 4, 5, 6\}$
- $B = \{6, 8\}$



- $P(G) = 0.5, P(R) = 0.5, P(B) = 0.25$

ℹ Question

$$P(G|R), P(R|G) = ?$$

- $P(G|R) = 0.5, P(R|G) = 0.5$

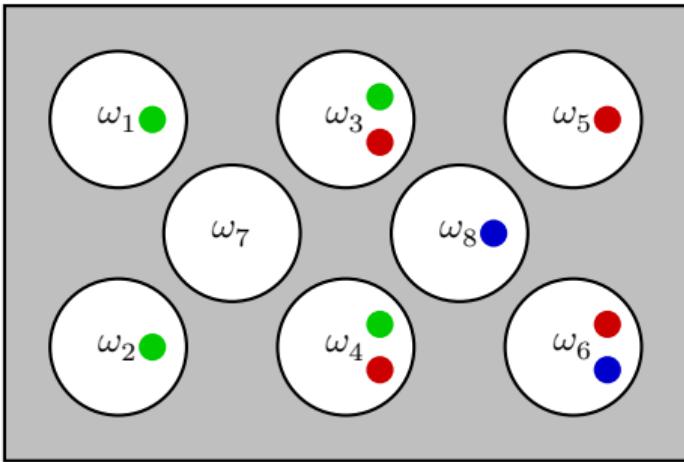
ℹ Question

$$P(R|B), P(B|R) = ?$$

- $P(R|B) = 0.5, P(B|R) = 0.25$

Независимость событий

- $G = \{1, 2, 3, 4\}$
- $R = \{3, 4, 5, 6\}$
- $B = \{6, 8\}$



- $P(G) = 0.5, P(R) = 0.5, P(B) = 0.25$

Question

$$P(G|R), P(R|G) = ?$$

- $P(G|R) = 0.5, P(R|G) = 0.5$

Question

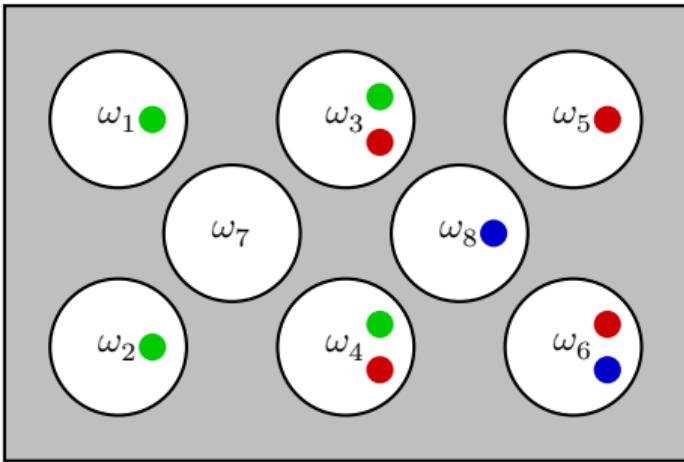
$$P(R|B), P(B|R) = ?$$

- $P(R|B) = 0.5, P(B|R) = 0.25$

- Наблюдаем: $P(B) = P(B|R), P(R) = P(R|B)$. Коэффициент ожидания этих событий а.к.а. вероятность не зависит от того, происходит ли одновременно другое событие или нет. Мы называем такие события **независимыми**.

Независимость событий

- $G = \{1, 2, 3, 4\}$
- $R = \{3, 4, 5, 6\}$
- $B = \{6, 8\}$



- $P(G) = 0.5, P(R) = 0.5, P(B) = 0.25$

Question

$$P(G|R), P(R|G) = ?$$

- $P(G|R) = 0.5, P(R|G) = 0.5$

Question

$$P(R|B), P(B|R) = ?$$

- $P(R|B) = 0.5, P(B|R) = 0.25$

- Наблюдаем: $P(B) = P(B|R), P(R) = P(R|B)$. Коэффициент ожидания этих событий а.к.а. вероятность не зависит от того, происходит ли одновременно другое событие или нет. Мы называем такие события **независимыми**.
- Более формально, чтобы называть A и B независимыми, должно выполняться:

$$P(A|B) = P(A) \text{ И } P(B|A) = P(B), \text{ при } P(A), P(B) > 0.$$

Независимость событий

- Если немного поработаем с идеей о независимости, получим более удобное определение:

$$P(A) = P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Definition

События A и B из одного вероятностного пространства (Ω, \mathcal{F}, P) называются *независимыми*, если:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B),$$

и *зависимыми* в обратном случае.