ФКН ВШЭ, МНаД.
Линейная алгебра.
Лист задач 2. Базисы и координаты.

1. Найдите координатный вектор для:

   (a) Вектора $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ в базисе $\mathcal{B} = \{b_1, b_2\}$ пространства $\mathbb{R}^2$, если $b_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix}$.

   (b) Вектора $p(x) = 4 + 5x$ в базисе $U = \{u_1, u_2\}$ пространства $\mathbb{R}[x, 1]$, если $u_1 = 1 + 2x$, $u_2 = -2 - 3x$.

   Hint: нужно составить и решить две системы линейных уравнений:

$$P_{B\to S}[x]_B = [x]_S \quad \text{и} \quad P_{U\to S}[p(x)]_U = [p(x)]_S$$

2. В пространстве $\mathbb{R}^2$ задан базис $B = \{b_1, b_2\}$, где $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

   (a) Найдите матрицу перехода $P_{B\to S}$ от базиса B к стандартному базису S пространства $\mathbb{R}^2$.

   (b) Найдите матрицу перехода $P_{S\to B}$ от стандартного базиса S к базису B.

   (c) Убедитесь, что эти матрицы являются обратными друг для друга.

3. В пространстве $\mathbb{R}^2$ задан базис $\mathcal{B} = \{b_1, b_2\}$, где $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, а также базис $\mathcal{C} = \{c_1, c_2\}$, где $c_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   Найдите:

   (a) Найдите матрицы перехода $P_{B\to S}$ и $P_{S\to B}$ от базиса $\mathcal{B}$ к стандартному базису и обратно.

   (b) Найдите матрицы перехода $P_{C\to S}$ и $P_{S\to C}$ от базиса $\mathcal{C}$ к стандартному базису и обратно.

   Далее, воспользуемся знанием, что $P_{B\to S}[x]_B = [x]_S = P_{C\to S}[x]_C$ (на этом моменте спросите себя, понимаете ли вы, почему это так). Примените трюк с обратной матрицей и найдите матрицы перехода от базиса $\mathcal{B}$ к базису $\mathcal{C}$ и обратно, то есть $P_{B\to C}$ и $P_{C\to B}$. Приведите пример, как это работает, на конкретно взятом векторе.

4. Пусть $\mathbb{V}$ — множество всех верхнетреугольных (у которых элементы под главной диагональю всегда равны нулю) матриц размера 2×2. Множество $\mathbb{V}$ является векторным пространством, и у него есть, например, стандартный базис:

$$\mathcal{A} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

   Найдите координаты элемента $D = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ относительно стандартного базиса $\mathcal{A}$. Покажите, что это работает в виде линейной комбинации базисных векторов и координат, *т.е.* как мы обсуждали, что если $\{v_1, \ldots, v_n\}$ — базис, то $\forall x$ из векторного пространства $x = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$.

   Но также могут быть и другие базисы! Пусть:

$$\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right)$$

   является другим базисом для $\mathbb{V}$. Постройте матрицу $P_{B\to A}$ перехода от базиса $\mathcal{B}$ к базису $\mathcal{A}$. Найдите координатный столбец $[D]_{\mathcal{B}}$, т.е. координаты элемента D относительно базиса $\mathcal{B}$.

$$P_{B\to S}[X]_B = [X]_S$$

$$+2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+(-4)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

1. Найдите координатный вектор для:

   (a) Вектора $x = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ в базисе $\mathcal{B} = \{b_1, b_2\}$ пространства $\mathbb{R}^2$, если $b_1 = \begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix}3\\8\end{pmatrix}$.

   (b) Вектора $p(x) = 4 + 5x$ в базисе $U = \{u_1, u_2\}$ пространства $\mathbb{R}[x, 1]$, если $u_1 = 1 + 2x$, $u_2 = -2 - 3x$.

Hint: нужно составить и решить две системы линейных уравнений:

$$P_{B\to S}[x]_B = [x]_S \quad \text{и} \quad P_{U\to S}[p(x)]_U = [p(x)]_S$$

a. $\left([b_1]_S \,|\, [b_2]_S\right)$

$$\boxed{\begin{pmatrix}2 & 3\\-4 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t_1\\t_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c}2 & 3 & 1\\-4 & 8 & 1\end{array}\right)\begin{matrix}\\+2R_1\end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cc|c}2 & 3 & 1\\0 & 14 & 3\end{array}\right)$$

$$t_2 = 3/14$$

$$2t_1 = 1 - 3t_2 = 1 - \frac{9}{14} = \frac{5}{14}$$

$$t_1 = \frac{5}{28}$$

$$[X]_B = \begin{pmatrix}5/28\\3/14\end{pmatrix}$$

$$\frac{5}{28}\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix} + \frac{6}{28}\begin{pmatrix}3\\8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \quad \checkmark$$

$$u_1 = 1 + 2X = 1\cdot 1 + 2\cdot X$$

$$u_2 = -2 - 3X \quad -2\cdot 1 + (-3)X$$

$$F = 4 + 5X = 4\cdot 1 + 5\cdot X$$

b. $$P_{U\to S} = \left[[u_1]_S \,|\, [u_2]_S\right] = \begin{bmatrix}1 & -2\\2 & -3\end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & -2\\2 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t_1\\t_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix} \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c}1 & -2 & 4\\2 & -3 & 5\end{array}\right)\begin{matrix}\\-2R_1\end{matrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c}1 & -2 & 4\\0 & 1 & -3\end{array}\right) \longrightarrow \begin{array}{l}t_2 = -3\\ t_1 = 4 + 2t_2 = 4 - 6 = -2\end{array}$$

$$\boxed{[p(x)]_U = \begin{pmatrix}-2\\-3\end{pmatrix}}$$

$$-2(1+2X) + (-3)(-2-3X) = 4 + 5X \quad \checkmark$$

2. В пространстве $\mathbb{R}^2$ задан базис $B = \{b_1, b_2\}$, где $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad S_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; S_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(a) Найдите матрицу перехода $P_{B \to S}$ от базиса B к стандартному базису S пространства $\mathbb{R}^2$.

(b) Найдите матрицу перехода $P_{S \to B}$ от стандартного базиса S к базису B.

(c) Убедитесь, что эти матрицы являются обратными друг для друга.

a. $P_{B \to S} = \left([b_1]_S \,\middle|\, [b_2]_S \right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

b. $P_{S \to B} = \left([S_1]_B \,\middle|\, [S_2]_B \right) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$P_{B \to S} [S_1]_B = [S_1]_S = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$[S_1]_B = \boxed{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}}$

$-1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right)_{-R_1} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{array}\right)$

$t_2 = 1$

$t_1 = 1 - 2t_2 = -1$

$P_{B \to S} [S_2]_B = [S_2]_S = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$[S_2]_B = \boxed{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}}$

$2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ✓

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} t_1 & t_2 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right)_{-R_1} \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$0t_1 + (-1)t_2 = 1$

$t_1 = -2t_2 = 2$

$t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} t_1 + 2t_2 = 0 \\ t_1 + t_2 = 1 \end{cases}$

3. В пространстве $\mathbb{R}^2$ задан базис $\mathcal{B} = \{b_1, b_2\}$, где $b_1 = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, а также базис $\mathcal{C} = \{c_1, c_2\}$, где $c_1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $c_2 = \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$.

Найдите:

(a) Найдите матрицы перехода $P_{B\to S}$ и $P_{S\to B}$ от базиса $\mathcal{B}$ к стандартному базису и обратно.

(b) Найдите матрицы перехода $P_{C\to S}$ и $P_{S\to C}$ от базиса $\mathcal{C}$ к стандартному базису и обратно.

Далее, воспользуемся знанием, что $P_{B\to S}[x]_B = [x]_S = P_{C\to S}[x]_C$ (на этом моменте спросите себя, понимаете ли вы, почему это так). Примените трюк с обратной матрицей и найдите матрицы перехода от базиса $\mathcal{B}$ к базису $\mathcal{C}$ и обратно, то есть $P_{B\to C}$ и $P_{C\to B}$. Приведите пример, как это работает, на конкретно взятом векторе.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

a. $$P_{B\to S} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}} = \left([b_1]_S \,\middle|\, [b_2]_S \right)$$

$$P_{S\to B} = \left(P_{B\to S}\right)^{-1} = \frac{1}{-3}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 1/3 \\ 1 & -1/3 \end{pmatrix}}$$

check: $$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1/3 \\ 1 & -1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \checkmark$$

b. $$P_{C\to S} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} ;$$

$$P_{S\to C} = \left(P_{C\to S}\right)^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}}$$

Check: $$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \checkmark$$

$$P_{B\to S}[X]_B = [X]_S = P_{C\to S}[X]_C$$

$$[X]_B = P_{C\to B}\cdot[X]_C$$

$$\left[[C_1]_B \,\middle|\, [C_2]_B \right]$$

$$[X]_B = P_{C\to B}[X]_C$$

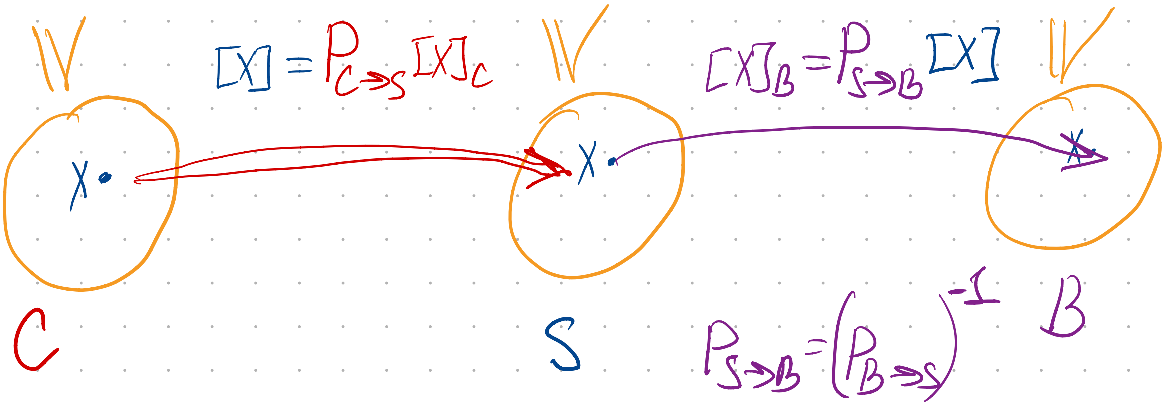
$$5x = 1$$

$$5^{-1}5x = 5^{-1}1$$

$$\cancel{(P_{B\to S})^{-1}} P_{B\to S}[X]_B = (P_{B\to S})^{-1} P_{C\to S}[X]_C$$

$$[X]_B = \boxed{(P_{B\to S})^{-1} P_{C\to S}} [X]_C$$

$$[X]_B = \boxed{P_{C\to B}} \cdot [X]_C$$



$$P_{C\to B} = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 \\ 1 & -1/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & -7/3 \end{pmatrix}$$

$$(P_{B\to S})^{-1} \qquad P_{C\to S}$$

$$AB = C\Theta$$

$$\cancel{A^{-1}A}B = A^{-1}C\Theta$$

$$A\cancel{BB^{-1}} = C\Theta B^{-1}$$

$$P_{B\to C} = \left(P_{C\to B}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & -7/3 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \frac{1}{-\frac{7}{9} - \frac{2}{9}} \begin{pmatrix} -7/3 & -1/3 \\ -2/3 & 1/3 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 7/3 & 1/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}}$$

Check:

$$\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & -7/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7/3 & 1/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \checkmark$$

4. Пусть $\mathbb{V}$ — множество всех верхнетреугольных (у которых элементы под главной диагональю всегда равны нулю) матриц размера 2×2. Множество $\mathbb{V}$ является векторным пространством, и у него есть, например, стандартный базис:

$$\mathcal{A} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

Найдите координаты элемента $D = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ относительно стандартного базиса $\mathcal{A}$. Покажите, что это работает в виде линейной комбинации базисных векторов и координат, *т.е.* как мы обсуждали, что если $\{v_1, \ldots, v_n\}$ — базис, то $\forall x$ из векторного пространства $x = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$.

Но также могут быть и другие базисы! Пусть:

$$\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right)$$

является другим базисом для $\mathbb{V}$. Постройте матрицу $P_{B \to A}$ перехода от базиса $\mathcal{B}$ к базису $\mathcal{A}$. Найдите координатный столбец $[D]_{\mathcal{B}}$, т.е. координаты элемента D относительно базиса $\mathcal{B}$.

$$\boxed{[D]_A = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}} \qquad 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_{B \to A}[X]_B = [X]_A \qquad P_{B \to A} = \left([b_1]_A \,\middle|\, [b_2]_A \,\middle|\, [b_3]_A \right) = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)_{-R_1} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)_{-R_2} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \begin{matrix} t_1 = 2 \\ t_2 = -1 \\ t_3 = 0 \end{matrix} \to \boxed{[D]_B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

$$2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

$$\cancel{(P_{B \to A})^{-1} P_{B \to A}}^{\,I} [X]_B = (P_{B \to A})^{-1} [X]_A$$