Линейная алгебра
Нормированные пространства

Глеб Карпов

МНаД ФКН ВШЭ

Пространства со скалярным произведением (Inner product spaces)

$F: x, y \longrightarrow \mathbb{R}$

Скалярное произведение

Пусть $\mathbb{V}$ — векторное пространство. Скалярное произведение на $\mathbb{V}$ — это **функция**, которая каждой паре векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ сопоставляет скаляр, обозначаемый как $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ или $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$, так что выполняются свойства 1–4 ниже.

1. Симметричность (сопряжённая): $\boxed{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{y}, \mathbf{x}),}$
2. Линейность: $\boxed{(\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \alpha(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + \beta(\mathbf{y}, \mathbf{z})}$ для любых векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ и любых скаляров α, β,
3. Неотрицательность: $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geq 0 \quad \forall \mathbf{x}$,
4. Невырожденность: $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. , аргументы равна

Скалярное произведение в координатных пространствах $\mathbb{R}^n$

Definition

Скалярное произведение двух векторов $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ — это число, вычисляемое по формуле:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n = \sum v_i \cdot u_i = V \cdot U$$

Геометрический смысл:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}| \cdot \cos\theta$$

где θ — угол между векторами $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$.

$$|u| = \|u\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$$

Обозначения скалярного произведения

Различные способы записи

1. Через транспонирование

$$\mathbf{u}^T\mathbf{v}$$

Матричная форма:

$$\mathbf{u}^T\mathbf{v} = \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{bmatrix}}_{[1 \times n]} \underbrace{\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}}_{[n \times 1]} = \underbrace{\boxed{}}_{[1 \times 1]}$$

Результат:

$$= u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n$$

2. Через угловые скобки

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$$

Альтернативно: - $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ — точечное произведение

Обозначения эквивалентны:

$$\mathbf{u}^T\mathbf{v} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$$

3 (u, v)

Слайд для записей

$$(AB)^T = B^T A^T$$

$$x \in \mathbb{R}^n$$

$$y \in \mathbb{R}^m$$

$$A \in \mathbb{R}^{n\times m}$$

$$Ay = g$$

$$\underset{n\times m}{A} \cdot \underset{m\times 1}{y} = \underset{n\times 1}{g}$$

$$\underbrace{x^T}_{1\times n}\underbrace{Ay}_{n\times 1} = \underset{1\times 1}{\square} = \langle x, Ay\rangle = \langle r, y\rangle =$$

$$= \langle \boxed{A^T x}, y\rangle$$

$$(x^T A)y = x^T(A\cdot y)$$

$$= \boxed{r^T}\underline{y} = \boxed{x^T A}\underline{y} \rightarrow r^T = x^T A$$

$$(r^T)^T = r = (x^T A)^T = A^T x$$

Слайд для записей

$$x^T(Ay) = \langle x, Ay \rangle \qquad \underline{\text{Equal}}.$$

$$\|$$

$$(x^TA)\cdot y = r^T y = \langle A^T x, y \rangle$$

$$r^T = x^TA$$

$$r = (x^TA)^T = A^Tx$$

Нормированные пространства

$\|\cdot\|_* \longrightarrow \mathbb{R}^+ = [0; +\infty)$

Свойства нормы:

1. Однородность: $\|\alpha\mathbf{v}\| = |\alpha| \cdot \|\mathbf{v}\|$ для любых $\mathbf{v}$ и скаляров α.
2. Неравенство треугольника: $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$.
3. Неотрицательность: $\|\mathbf{v}\| \geq 0$ для всех векторов $\mathbf{v}$.
4. Невырожденность: $\|\mathbf{v}\| = 0$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Определение (норма и нормированное пространство)

Пусть в векторном пространстве V каждой вектору $\mathbf{v}$ сопоставлено число $\|\mathbf{v}\|$ так, что выполняются свойства 1–4 выше. Тогда функция $\mathbf{v} \mapsto \|\mathbf{v}\|$ называется нормой. Векторное пространство V, оснащённое нормой, называется нормированным пространством.

Разные нормированные пространства

$$\sqrt{\langle v, v\rangle} = \sqrt{v_1 \cdot v_1 + v_2 \cdot v_2 + \ldots + v_n \cdot v_n}$$

Любое пространство со скалярным произведением является нормированным, поскольку норма $\|\mathbf{v}\|_2 = \sqrt{(\mathbf{v}, \mathbf{v})}$ удовлетворяет свойствам 1–4. Однако существуют и другие нормы. Например, для $p, 1 \leq p < \infty$, можно определить норму $\|\cdot\|_p$ на $\mathbb{R}^n$ как

$$\|X\|_2 = \sqrt[2]{X_1^2 + \ldots + X_n^2}$$

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left(|x_1|^p + |x_2|^p + \ldots + |x_n|^p\right)^{1/p} = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p}.$$

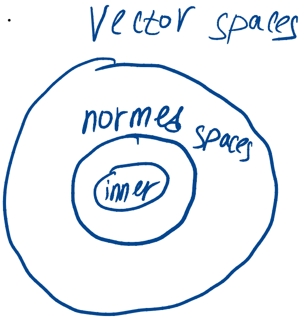
$$\|X\|_1 = |X_1| + \ldots + |X_n|$$

Также можно определить норму $\|\cdot\|_\infty$ (при $p = \infty$) как

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max\{|x_k| : k = 1, 2, \ldots, n\}$$

$$\|\Delta\|_2 = \|y - \tilde{y}\|_2 \qquad \|\Delta\|_\infty = \|y - \tilde{y}\|_\infty < \varepsilon$$

$$\|X\|_2 \gtreqless \|y\|_2$$



Ортогональность. Ортогональные и ортонормированные базисы.

Определение

Два вектора $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ называются ортогональными (перпендикулярными), если $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$. Запись $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$ обозначает ортогональность векторов.

Для ортогональных векторов $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ верно тождество Пифагора:

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|_2^2 = \|\mathbf{u}\|_2^2 + \|\mathbf{v}\|_2^2 \quad \text{if } \mathbf{u} \perp \mathbf{v}$$

Доказательство:

$\|x\|_2 = \sqrt{(x,x)}$

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|_2^2 =& (\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v}) = (\mathbf{u}, \mathbf{u}) + (\mathbf{v}, \mathbf{v}) + \cancelto{0}{(\mathbf{u}, \mathbf{v})} + \cancelto{0}{(\mathbf{v}, \mathbf{u})} \\ =& \|\mathbf{u}\|_2^2 + \|\mathbf{v}\|_2^2 \\ & ((\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{v}, \mathbf{u}) = 0 \text{ because of orthogonality }).\end{aligned}$$

Ортогональные базисы.

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$ базис ортонорм.

$$\begin{array}{cc} a & b \\ \left\{\begin{pmatrix}1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\\-1/\sqrt{3}\end{pmatrix}, \right. & \left. \begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\0\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix}\right\} \end{array}$$

Определение

Система векторов $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ называется ортогональной, если любые два вектора взаимно ортогональны, то есть $(\mathbf{v}_j, \mathbf{v}_k) = 0$ при $j \neq k$.
Если дополнительно $\|\mathbf{v}_k\|_2 = 1$ для всех k, то система называется ортонормированной.

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$$ ортонорм. набор векторов НО! не базис

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$$

$\mathrm{Span} \neq \mathbb{R}^4$

$$\langle a, b\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{6}} = 0$$

$$\|a\|_2 = 1 = \sqrt{\langle a, a\rangle} = \sqrt{3 \cdot 1/3}$$

$$\|b\|_2 = 1 = \sqrt{\langle b, b\rangle} = \sqrt{2 \cdot 1/2}$$

Зачем это нужно?

$$\mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_n \mathbf{v}_n = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mathbf{v}_j$$

Взяв скалярное произведение обеих частей равенства с $\mathbf{v}_1$, получаем $\sum \alpha_j \cdot (v_j, v_1)$

$$(\mathbf{x}, \mathbf{v}_1) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j (\mathbf{v}_j, \mathbf{v}_1) = \alpha_1 (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1) = \alpha_1 \|\mathbf{v}_1\|^2$$

Аналогично, беря скалярное произведение обеих частей с $\mathbf{v}_k$, получаем

$$(\mathbf{x}, \mathbf{v}_k) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j (\mathbf{v}_j, \mathbf{v}_k) = \alpha_k (\mathbf{v}_k, \mathbf{v}_k) = \alpha_k \|\mathbf{v}_k\|^2$$

Итак

$$\alpha_k = \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{v}_k)}{\|\mathbf{v}_k\|^2}$$