Линейная алгебра
Системы линейных уравнений

Глеб Карпов

МНаД ФКН ВШЭ

Система линейных уравнений

- Привычный вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \\ x_n \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} b_1 \\ \\ b_m \end{pmatrix}$$

Другие формы СЛУ

- Матричная форма

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a_1 & a_2 & a_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$P_{B\to S}[X]_B = [X]$$

$$[X]_B = (P_{B\to S})^{-1}[X]$$

$$\boxed{A \cdot x = b}$$

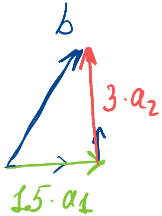
rhs

right-hand side

Если $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $x = A^{-1}b$, если $\exists A^{-1}$

$$x_1a_1 + x_2a_2 + \dots + x_na_n = b,$$

где a_i — i-й столбец матрицы A



Другие формы СЛУ

- Матричная форма

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$A \cdot x = b$$

- Векторная форма

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_n a_n = b,$$

где a_i — i-й столбец матрицы A

- Расширенная форма

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Элементарные преобразования строк

Существует три типа элементарных преобразований строк:

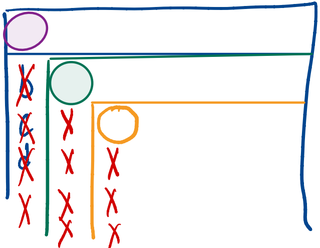
1. **Перестановка строк**: поменять местами две строки матрицы
2. **Умножение на скаляр**: умножить строку на ненулевой скаляр a
3. **Замена строки**: заменить строку k её суммой с константным множителем строки j; все остальные строки остаются неизменными

$$A[i,:] = A[i,:] + \alpha A[j,:]$$

Метод Гаусса (приведение к ступенчатому виду)

1. Найти самый левый ненулевой столбец матрицы
2. Убедиться, применяя преобразования типа 1 (перестановка строк), если необходимо, что первый (верхний) элемент этого столбца ненулевой. Этот элемент называется ведущим элементом или просто ведущим
3. Занулить все ненулевые элементы под ведущим, добавляя (вычитая) подходящее кратное первой строки к строкам номер $2, 3, \ldots, m$

a_{11}



$$A[2;:] = A[2,:] - \frac{b}{a_{11}}[A_1,:]$$

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

$$(b\ d) - \frac{b}{a}(a\ c)$$

$$(b\ d) - \left(b\ \frac{bc}{a}\right) = \left(0\ d - \frac{bc}{a}\right)$$

Слайд для записи

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ \boxed{3} & 2 & 1 & 7 \\ \boxed{2} & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -3R_1 \\ -2R_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -8 & 4 \\ 0 & -3 & -4 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot(-1/4) \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & \boxed{-3} & -4 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ +3R_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 3 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & -4 \end{array}\right) \qquad X = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Backward process:

$2x_3 = -4$

$\hookrightarrow x_3 = -2$

$x_2 + 2x_3 = -1$

$x_2 = -1 - 2x_3 = -1 + 4 = 3$

$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1$

$x_1 = 1 - 2x_2 - 3x_3 =$

$= 1 - 6 + 6 = 1$

Ступенчатый вид

1. Все нулевые строки (т.е. строки со всеми элементами равными 0), если они есть, находятся ниже всех ненулевых строк

Для ненулевой строки назовём самый левый ненулевой элемент ведущим элементом. Тогда второе свойство ступенчатого вида можно сформулировать следующим образом:

2. Для любой ненулевой строки её ведущий элемент строго правее ведущего элемента в предыдущей строке.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 5 & 0 & 2 \\ 0 & \cancel{0} & 0 & 0 & \boxed{1} & 3 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Ступенчатый вид

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} X_1 & X_2 & X_3 & X_4 & X_5 & \end{array} \\
\left(\begin{array}{ccccc|c}
\boxed{1} & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & \boxed{1} & 5 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 3
\end{array}\right)
\end{array}$$

Некоторые столбцы НЕ содержат ведущих элементов. Переменные, соответствующие им — **свободные переменные**

- Решение системы

$$\begin{aligned}
1 \cdot x_5 &= 3 &\quad \Rightarrow \quad& x_5 = 3 \\
1 \cdot x_3 + 5x_4 &= 2 &\quad \Rightarrow \quad& x_3 = 2 - 5x_4 \\
x_1 + 2x_2 &= 1 &\quad \Rightarrow \quad& x_1 = 1 - 2x_2
\end{aligned}$$

Общее решение

$$
\begin{aligned}
1 \cdot x_5 &= 3 & \Rightarrow \quad & x_5 = 3 \\
1 \cdot x_3 + 5x_4 &= 2 & \Rightarrow \quad & x_3 = 2 - 5x_4 \\
x_1 + 2x_2 &= 1 & \Rightarrow \quad & x_1 = 1 - 2x_2
\end{aligned}
$$

- Финально, общее решение СЛУ

$$
x = \begin{cases} x_1 = 1 - 2x_2 \\ x_2 = \text{free} \\ x_3 = 2 - 5x_4 \\ x_4 = \text{free} \\ x_5 = 3 \end{cases}, \quad x_2, x_4 \in \mathbb{R}
$$

Фундаментальная система решений

Общее решение

- Финально, общее решение СЛУ

$$x = \begin{cases} x_1 = 1 - 2x_2 \\ x_2 = \text{free} \\ x_3 = 2 - 5x_4 \\ x_4 = \text{free} \\ x_5 = 3 \end{cases}, \quad x_2, x_4 \in \mathbb{R}$$

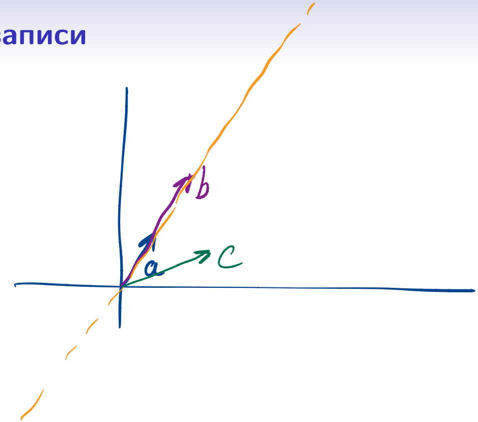
- Векторная форма общего решения

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_2, x_4 \in \mathbb{R}$$

Слайд для записи

$$\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$$

$$x_1\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}}_{a}+x_2\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}}_{b}=\underbrace{\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}}_{c}$$



$$\left(\begin{array}{cc|c}1&2&2\\ \boxed{2}&4&2\end{array}\right)_{-2R_1}\sim\left(\begin{array}{cc|c}1&2&2\\0&0&-2\end{array}\right)$$

$0x_1+0x_2=-2$

inconsistent

$[0 \ \dots \ 0 \,|\, b\neq 0]$

Слайд для записи

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} x_1 & x_2 \\ \multicolumn{2}{c}{\left(\begin{array}{cc|c} \boxed{1} & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)} \end{array}$$

$$x_1 + 2x_2 = 2$$

$$x_1 = 2 - 2x_2$$

$$\begin{cases} x_1 = 2 - 2x_2 \\ x_2 = \text{free} \end{cases}$$

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \forall x_2 \in \mathbb{R}$$

Примеры

$$P_{B\to S}[X]_B = [X]$$