Линейная алгебра

Построение матрицы линейного отображения. Изменение матрицы при изменении базисов.

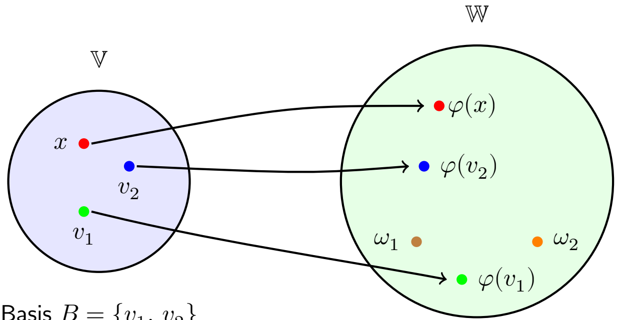
Глеб Карпов

МНаД ФКН ВШЭ

Линейные отображения и векторные пространства

Действующие лица

$$\varphi : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$$



Basis $B = \{v_1,\, v_2\}$

Basis $C = \{\omega_1,\, \omega_2\}$

Напоминание: построение матрицы линейного преобразования

- Для определения значения функции нам необходимо только знать значения функции от базисных векторов: $\varphi(x) = \varphi(x_1 v_1 + x_2 v_2) = x_1 \varphi(v_1) + x_2 \varphi(v_2)$

Напоминание: построение матрицы линейного преобразования

- Для определения значения функции нам необходимо только знать значения функции от базисных векторов: $\varphi(x) = \varphi(x_1 v_1 + x_2 v_2) = x_1 \varphi(v_1) + x_2 \varphi(v_2)$
- Образы базисных векторов возможно разложить по базису в пространстве $\mathbb{W}$:

$$\varphi(v_1) = a_{11}\omega_1 + a_{21}\omega_2, \quad [\varphi(v_1)]_C = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$$

$$\varphi(v_2) = a_{12}\omega_1 + a_{22}\omega_2, \quad [\varphi(v_2)]_C = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$$

Напоминание: построение матрицы линейного преобразования

- Для определения значения функции нам необходимо только знать значения функции от базисных векторов: $\varphi(x) = \varphi(x_1 v_1 + x_2 v_2) = x_1 \boxed{\varphi(v_1)} + x_2 \boxed{\varphi(v_2)}$
- Образы базисных векторов возможно разложить по базису в пространстве $\mathbb{W}$:

$$\varphi(v_1) = a_{11}\omega_1 + a_{21}\omega_2,\ [\varphi(v_1)]_C = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$$

$$\varphi(v_2) = a_{12}\omega_1 + a_{22}\omega_2,\ [\varphi(v_2)]_C = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$$

- В результате получаем разложение $\varphi(x)$ по базису в пространстве $\mathbb{W}$: $\varphi(x) = \gamma_1\omega_1 + \gamma_2\omega_2$, где:

$$[\varphi(x)]_C = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \boxed{L_{\varphi,(B,C)}\,[x]_B}$$

Устройство матрицы линейного преобразования

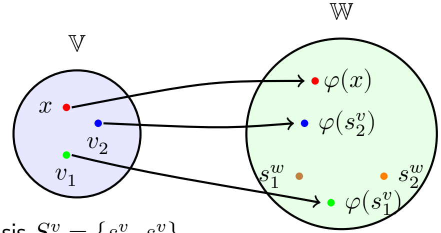
- Если обобщать наш игрушечный пример, то

$$L_{\varphi,\,(B,C)} = \begin{pmatrix} | & | & \cdots & | \\ [\varphi(v_1)]_C & [\varphi(v_2)]_C & \cdots & [\varphi(v_n)]_C \\ | & | & \cdots & | \end{pmatrix},$$

где $[\varphi(v_i)]_C$ — это координаты образа базисного вектора v_i в базисе C.

Случай стандартных базисов

$$\varphi : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$$



Basis $S^v = \{s_1^v,\, s_2^v\}$

Basis $S^w = \{s_1^w, x_2^w\}$

- В случае стандартных базисов получаем

$$L_\varphi = \begin{pmatrix} | & | & \cdots & | \\ [\varphi(s_1^v)] & [\varphi(s_2^v)] & \cdots & [\varphi(s_n^v)] \\ | & | & \cdots & | \end{pmatrix},$$

где $[\varphi(s_i^v)]$ — это координаты образа базисного вектора s_i^v в стандартном базисе S^w в пространстве $\mathbb{W}$.

Чувствительность матрицы к выбору пары базисов

Пример

- Построенная матрица линейного преобразования крайне хрупка. По факту она работает только с теми базисами, которые были выбраны при ее построении.

Пример

- Построенная матрица линейного преобразования крайне хрупка. По факту она работает только с теми базисами, которые были выбраны при ее построении.
- Пример: $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\varphi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ 2x_2 - x_1 \end{pmatrix}$

$S^v \quad S^w$

$L_\varphi = \left[[\varphi(s_1^v)] \,\middle|\, [\varphi(s_2^v)] \right]$

$\varphi\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\varphi\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$L_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$x = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}; \quad \varphi\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}$

$\underbrace{\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}}_{[\varphi(x)]} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}_{L_\varphi} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}}_{[x]}$

Чувствительность матрицы к выбору пары базисов

Пример

- Построенная матрица линейного преобразования крайне хрупка. По факту она работает только с теми базисами, которые были выбраны при ее построении.
- Пример: $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\varphi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ 2x_2 - x_1 \end{pmatrix}$

$$\varphi\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad [X]_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

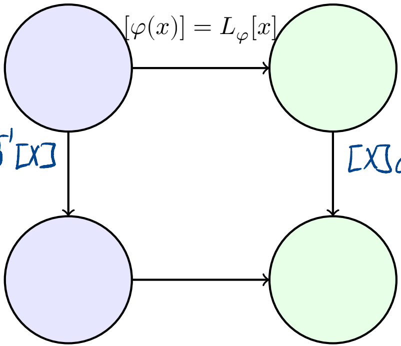
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.5 \\ -1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Изменение матрицы линейного преобразования при изменении базисов пространств

$\mathbb{V}$ $\qquad \varphi : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$ $\qquad \mathbb{W}$

Basis $S^v = \{s_1^v,\, s_2^v\}$ $\qquad [\varphi(x)] = L_\varphi [x]$ $\qquad$ Basis $S^w = \{s_1^w,\, s_2^w\}$

$[x] = B\,[x]_B$ $\qquad [x]_B = B^{-1}[x]$ $\qquad [x]_C = C^{-1}[x]$ $\qquad [x] = C\,[x]_C$



$\mathbb{V}$ $\qquad \mathbb{W}$

Basis $B = \{v_1,\, v_2\}$ $\qquad$ Basis $C = \{\omega_1,\, \omega_2\}$

$$[\varphi(x)]_C = L_{\varphi,(B,C)}[x]_B$$

Изменение матрицы линейного преобразования при изменении базисов пространств

Ура, мы добрались!

- Подключаем наши знания о переходах между базисами. Пусть следующие матрицы выполняют переходы из базисов B и C в стандартные:

$$[x] = \boxed{P_{B\to S^v}}[x]_B = \boxed{B}[x]_B, \quad [a] = \boxed{P_{C\to S^u}}[a]_C = \boxed{C}[a]_C$$

$$[x]_B = B^{-1}[x] \qquad [a]_C = C^{-1}[a]$$

$$P_{S^v\to B} \qquad P_{S^w\to C}$$

Изменение матрицы линейного преобразования при изменении базисов пространств

Ура, мы добрались!

- Подключаем наши знания о переходах между базисами. Пусть следующие матрицы выполняют переходы из базисов B и C в стандартные:

$$[x] = P_{B\to S^v}[x]_B = \underline{B[x]}_B, \quad [a] = P_{C\to S^w}[a]_C = C[a]_C$$

- Подставим выражения в известную формулу $\underline{[\varphi(x)] = L_\varphi[x]}$:

$[\varphi(x)] = C\,[\varphi(x)]_C$

$$C[\varphi(x)]_C = L_\varphi B[x]_B$$

$[x] = B\,[x]_B$

Изменение матрицы линейного преобразования при изменении базисов пространств

Ура, мы добрались!

- Подключаем наши знания о переходах между базисами. Пусть следующие матрицы выполняют переходы из базисов B и C в стандартные:

$$[x] = P_{B \to S^v}[x]_B = B[x]_B, \quad [a] = P_{C \to S^w}[a]_C = C[a]_C$$

- Подставим выражения в известную формулу $[\varphi(x)] = L_\varphi [x]$:

$$C^{-1}\, C[\varphi(x)]_C = C^{-1} L_\varphi B[x]_B$$

- Используем трюк с обратной матрицей:

$$[\varphi(x)]_C = \boxed{C^{-1} L_\varphi B}[x]_B = L_{\varphi,(B,C)}[x]_B$$

Изменение матрицы линейного преобразования при изменении базисов пространств

Ура, мы добрались!

- Подключаем наши знания о переходах между базисами. Пусть следующие матрицы выполняют переходы из базисов B и C в стандартные:

$$[x] = P_{B \to S^v}[x]_B = B[x]_B, \quad [a] = P_{C \to S^w}[a]_C = C[a]_C$$

- Подставим выражения в известную формулу $[\varphi(x)] = L_\varphi[x]$:

$$C[\varphi(x)]_C = L_\varphi B[x]_B$$

- Используем трюк с обратной матрицей:

$$[\varphi(x)]_C = C^{-1}L_\varphi B[x]_B = L_{\varphi,(B,C)}[x]_B$$

- Финально, формула для изменения матрицы линейного преобразования при одновременном изменении пары базисов из стандартного:

$$\boxed{L_{\varphi,(B,C)} = C^{-1}L_\varphi B}$$

Чувствительность матрицы к выбору пары базисов

$$L_{\varphi,(B,S^w)} = \underbrace{C^{-1}}_{I} L_\varphi \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$$

$$B = P_{B \to S^v} = \left([v_1] \mid [v_2] \right)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$L_{\varphi,(B,S)}$ $[X]_B$ $[\varphi(X)]_S$

Пример

- Построенная матрица линейного преобразования крайне хрупка. По факту она работает только с теми базисами, которые были выбраны при ее построении.
- Пример: $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ 2x_2 - x_1 \end{pmatrix}$

$$\boxed{\varphi \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad [X]_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\underset{L_\varphi}{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 2 \\ 0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.5 \\ -1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Примеры

V $\qquad\qquad\qquad\qquad$ W

$\{1, x, x^2, x^3\}$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\{1, x, x^2\}$

$$\varphi(ax^3+bx^2+cx+d) = (3ax^2+2bx+c)$$

$$L_\varphi = \left[\, [\varphi(s_1^V)] \;\Big|\; \dots \;\Big|\; [\varphi(s_4^V)] \,\right]$$

$$\varphi(1) = 0 \;; \quad [\varphi[1]] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \varphi(x^2) = 2x \quad [\varphi(x^2)] = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(x) = 1 \quad [\varphi(x)] = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \varphi(x^3) = 3x^2 \quad [\varphi(x^3)] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$\{1, x, x^2, x^3\}$ $\qquad\qquad$ $\{1, x, x^2\}$

Примеры

$$L_\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$F = 5x^3 - 7x^2 + 8x + 16$$

$$F' = 15x^2 - 14x + 8$$

$$[F] = \begin{pmatrix} 16 \\ 8 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}_{L_\varphi} \underset{[F]}{\begin{pmatrix} 16 \\ 8 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix}} = \underset{[\varphi[F]]}{\begin{pmatrix} 8 \\ -14 \\ 15 \end{pmatrix}}$$

$$[\varphi(F)] = \begin{pmatrix} 8 \\ -14 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Слайд для записей