Линейная алгебра

Построение матрицы линейного отображения.

Глеб Карпов

МНаД ФКН ВШЭ

Слайд для записи

$[x]_B$

$F(x)$

$a = (1,2,3)^T$

$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Обратные элементы

$$5x = 1$$

$$\underbrace{5^{-1}\, 5}_{1} x = 5^{-1} \cdot 1$$

$$x = 5^{-1} \cdot 1 = \frac{1}{5}$$

бин. операция

$$a * b = c$$

e: $\forall a \in V$

$$a * e = e * a = a$$

$+$: $5 + 0 = 0 + 5 = 5$

$\cdot$: $5 \cdot 1 = 1 \cdot 5 = 5$

Inverse:

$$a^{-1} * a = a * a^{-1} = e$$

$+$: $-5 + 5 = 5 + (-5) = 0$

$\cdot$: $\frac{1}{5} \cdot 5 = 5 \cdot \frac{1}{5} = 1$

Обратные элементы

A^{-1}, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$I = e = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{pmatrix}_{n \times n}$$

Identity matrix

$$A^{-1} A = A A^{-1} = I$$

Обратная матрица

Обратная матрица

Для квадратной матрицы A размера $n \times n$ **обратной матрицей** называется матрица A^{-1} такая, что:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$$

где I_n — единичная матрица размера $n \times n$.

Обратная матрица существует **только** для невырожденных (обратимых) матриц. Матрица A невырождена тогда и только тогда, когда:

- $\det(A) \neq 0$
- Столбцы матрицы A линейно независимы
- Строки матрицы A линейно независимы
- Система $Ax = 0$ имеет только тривиальное решение $x = 0$
- Для любого вектора b система $Ax = b$ имеет единственное решение

$$\overbrace{A^{-1}A}^{I}x = A^{-1}b \to x = A^{-1}b$$

$$Ax = b$$

Если иначе, то матрица A называется **вырожденной** или **сингулярной** и обратной не имеет.

Формула для матрицы 2x2

Общая формула

Для матрицы $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

где $\det(A) = ad - bc$

Слайд для записи

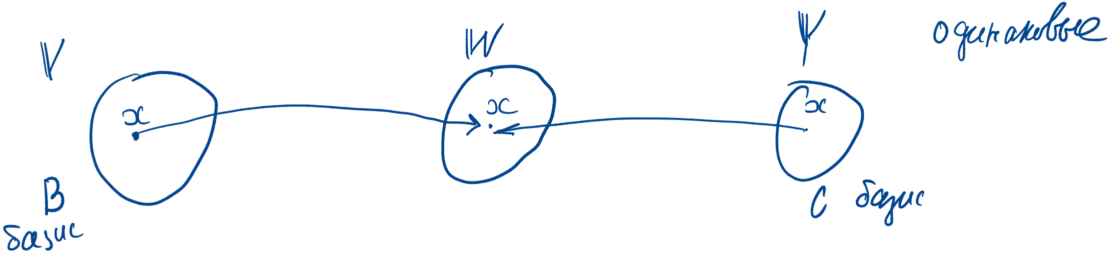
$$[x]_C = A_{B\to C}[x]_B$$

$$A_{B\to C}^{-1}[x]_C = \underbrace{A_{B\to C}^{-1}A_{B\to C}}_{I}[x]_B$$

$$[x]_B = (A_{B\to C})^{-1}[x]_C$$

$$[x]_B = A_{C\to B}[x]_C$$

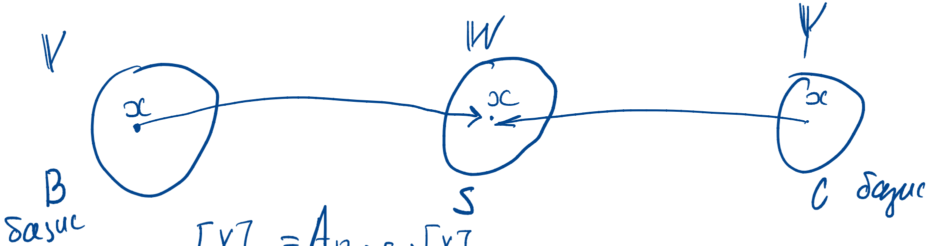
$$A_{C\to B} = (A_{B\to C})^{-1}$$



Слайд для записи

$$[X]_C = A_{B\to C}[X]_B$$

одинаковые



$$[X]_S = A_{B\to S}\cdot[X]_B$$

$$[X]_S = P_{C\to S}\cdot[X]_C$$

$$A_{B\to S}\cdot[X]_B = P_{C\to S}\cdot[X]_C$$

$$\underbrace{A_{B\to S}^{-1}A_{B\to S}}_{I}[X]_B = \underbrace{\boxed{A_{B\to S}^{-1}P_{C\to S}}}_{P_{C\to B}}\cdot[X]_C$$

Слайд для записи

$\mathbb{R}^n: \quad S=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\\vdots\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \ldots \begin{pmatrix}0\\0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}\right\}$

$\mathbb{R}^2 \quad S=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$

$(1,0) \qquad (1,0,0)$

$\mathbb{R}^{2\times 2}: \quad S=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} \ldots \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$

$\mathbb{R}[x,2] \qquad S=\{1, x, x^2\}$

$3x^2-x+4$

Примеры

$$[x]_{S} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A_{B\to S}\,[x]_B\,.$$

$$\begin{array}{cc} [v_1]_S & [v_2]_S \end{array}$$

$$B = \left\{ \underset{v_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}, \underset{v_2}{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}} \right\}, \quad \mathbb{R}^2$$

$$\underset{[X]_S}{\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}_{A_{B\to S}} \underset{[x]_B}{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$(A_{B\to S})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{1-(-2)\cdot(-2)} = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

$$[X]_B = (A_{B\to S})^{-1} \cdot [X]_S$$

$$\| $$

$$A_{S\to B}$$

Примеры

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix} = 6\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad [x]_S = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$A_{S\to B} = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

$$[x]_B = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix} = x$$

Примеры

② $\mathbb{R}[x,1] \qquad\qquad \mathbb{R}[x,1]$

$$W \ni F(x) \xrightarrow{Id} F(x) \in W$$

$$B=\{\underbrace{2}_{v_1},\ \underbrace{1+x}_{v_2}\} \qquad\qquad S=\{1, x\}$$

$$[F(x)]_S = A_{B\to S}[F(x)]_B$$

$$\begin{pmatrix}7\\5\end{pmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$$

$$A_{B\to S} = \Big[\, [v_1]_S \;\Big|\; [v_2]_S \,\Big]$$

$$F(x) = 5x+7 = 1\cdot 2 + 5\cdot(1+x); \quad [F(x)]_B = \begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$$

$$2 = 2\cdot 1 + 0\cdot x \qquad \begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$1+x = 1\cdot 1 + 1\cdot x$$

$$F(x) = 7\cdot 1 + 5\cdot x; \quad [F(x)]_S = \begin{pmatrix}7\\5\end{pmatrix}$$

Примеры

$$A_{S\to B} = \left(A_{B\to S}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2\cdot 1 - 0\cdot 1}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$g(x) = 5 + 6x = $$
$$= 5\cdot 1 + 6\cdot x$$

$$[g(x)]_S = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$A_{S\to B}[g]_S = [g]_B$$

$$\begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1/2 \\ 6 \end{pmatrix}}_{[g]_B}$$

Примеры

$\begin{pmatrix} -1/2 \\ 6 \end{pmatrix}$ $\quad B = \{\underset{v_1}{2}, \underset{v_2}{1+x}\}$

$[g]_B$

$$-\frac{1}{2} \cdot 2 + 6 \cdot (1+x) = 5 + 6x = g(x)$$