Линейная алгебра
Построение матрицы линейного отображения.

Глеб Карпов

МНаД ФКН ВШЭ

Слайд для записи

$5x = 1$ $\qquad$ $x = 1/5$

Обратные элементы

$$5x = 1$$

$$\underbrace{5^{-1}\, 5}_{1}\, x = 5^{-1}\cdot 1$$

$$x = 5^{-1}\cdot 1 = \frac{1}{5}$$

бин. операция

$$a * b = c$$

$$e:\quad \forall a \in V$$

$$a * e = e * a = a$$

$$+:\quad 5+0 = 0+5 = 5$$

$$\cdot:\quad 5\cdot 1 = 1\cdot 5 = 5$$

Inverse:

$$a^{-1} * a = a * a^{-1} = e$$

$$+:\quad -5+5 = 5+(-5) = 0$$

$$\cdot:\quad \frac{1}{5}\cdot 5 = 5\cdot\frac{1}{5} = 1$$

Обратные элементы

$$A_{n\times n}\cdot B_{n\times n}$$

$$\underbrace{A^{-1}\cdot A}_{} = \underbrace{A\cdot A^{-1}}_{} = I_n$$

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}_{n\times n}$$

Обратная матрица

Обратная матрица

Для квадратной матрицы A размера $n \times n$ **обратной матрицей** называется матрица A^{-1} такая, что:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$$

где I_n — единичная матрица размера $n \times n$.

Обратная матрица существует **только** для невырожденных (обратимых) матриц. Матрица A невырождена тогда и только тогда, когда:

- $\det(A) \neq 0$
- Столбцы матрицы A линейно независимы
- Строки матрицы A линейно независимы
- Система $Ax = 0$ имеет только тривиальное решение $x = 0$
- Для любого вектора b система $Ax = b$ имеет единственное решение

$$Ax = b$$

$$\underbrace{A^{-1}A}_{I}x = A^{-1}b$$

$$x = A^{-1}b$$

Если иначе, то матрица A называется **вырожденной** или **сингулярной** и обратной не имеет.

Формула для матрицы 2x2

Общая формула

Для матрицы $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

где $\det(A) = ad - bc$

Слайд для записи

$$[x]_C = A_{B\to C}[x]_B$$

$$\left[\, [v_1]_C \;\middle|\; [v_2]_C \;\middle|\; \ldots \;\middle|\; [v_n]_C \,\right]$$

$$\left(A_{B\to C}\right)^{-1}[x]_C = \underbrace{\left(A_{B\to C}\right)^{-1}A_{B\to C}}_{I}[x]_B$$

$$[x]_B = \left(A_{B\to C}\right)^{-1}[x]_C$$

$$A_{C\to B} = \left(A_{B\to C}\right)^{-1}$$

Примеры

1 $\quad X = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad [X]_S = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

$$B = \left\{ \overset{v_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}, \overset{v_2}{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}} \right\}$$

$$X = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad [X]_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$[X]_S = A_{B \to S} [X]_B$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}_{A_{B \to S}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{[X]_B} = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}}_{[X]_S}$$

$$\left[[v_1]_S \,\middle|\, [v_2]_S \right] = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[v_1]_S = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Big| \quad [v_2]_S = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Примеры

$$[X]_B = A_{S\to B}\cdot [X]_S \qquad \begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix} = A_{B\to S}$$

$$A_{S\to B} = \left(A_{B\to S}\right)^{-1} = \frac{1}{-3}\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1/3 & 2/3\\ 2/3 & -1/3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1/3 & 2/3\\ 2/3 & -1/3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\frac{10}{3}\\ \frac{4}{3}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1/3 & 2/3\\ 2/3 & -1/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6\\ 8\end{pmatrix}$$

$$\shortparallel$$

$$[X]_B$$

$$X = \begin{pmatrix}6\\ 8\end{pmatrix}$$

$$[X]_S = \begin{pmatrix}6\\ 8\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}6\\ 8\end{pmatrix} = 6\cdot\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} + 8\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$$

Примеры

$$\begin{pmatrix} \frac{10}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix} \qquad B = \left\{ \overset{b_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}, \overset{b_2}{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}} \right\}$$

$$\begin{matrix} \| \\ [X]_B \end{matrix}$$

$$\frac{10}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{4}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{18}{3} \\ \frac{24}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Примеры

②

$$\mathbb{R}[x,1] \xrightarrow{Id(x)} \mathbb{R}[x,1]$$

$$F(x) \longmapsto F(x)$$

$$B = \{2,\ 1+x\} \qquad S = \{1, x\}$$

$$[F(x)]_S = A_{B\to S}\,[F(x)]_B$$

$$\begin{pmatrix}7\\5\end{pmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$$

$$A_{B\to S}$$

$$\Big[\,[v_1]_S \,\Big|\, [v_2]_S\,\Big] = \begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$2 = 2\cdot 1 + 0x$$

$$1+x = 1\cdot 1 \quad 1\cdot x$$

$$F(x) = 5x+7 \quad = 1\cdot 2 + \quad 5\cdot(1+x)$$

$$[F(x)]_S = \begin{pmatrix}7\\5\end{pmatrix} \qquad [F(x)]_B = \begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$$

Примеры

$$[F]_B = A_{S\to B}[F]_S$$

$$A_{S\to B} = \left(A_{B\to S}\right)^{-1} = \frac{1}{2\cdot 1 - 0\cdot 1}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left([S_1]_B \,\middle|\, [S_2]_B\right)$$

$$\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$F = 8 + 2X$$

$$[F]_S = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$B = \{2, 1+X\}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}}_{[F]_B}$$

$$3\cdot 2 + 2\cdot(1+X) = 8 + 2X \quad \checkmark$$

Примеры

3

$V = \mathbb{R}^3 \qquad W = \mathbb{R}^3$

$$S_V \xrightarrow{\varphi(X)} S_W$$

$$\varphi(X) = \begin{pmatrix} x_2 + x_3 \\ 2x_1 + x_3 \\ 3x_1 - x_2 \end{pmatrix},$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$S_V = S_W = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$A_\varphi = \Big[[\varphi(s_{v_1})]_{S_W} \,\Big|\, [\varphi(s_2)]_{S_W} \,\Big|\, [\varphi(s_{v_3})]_{S_W} \Big]$$

$$\varphi(s_{v_1}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \varphi(s_{v_2}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \varphi(s_{v_3}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad [\varphi(s_{v_1})]_{S_W} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Примеры

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} x_2 + x_3 \\ 2x_1 + x_3 \\ 3x_1 - x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}}_{A_\varphi} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}_{[x]_{S_V}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}}_{[\varphi(x)]_{S_W}}$$