Линейная алгебра

Замена базиса как линейное отображение. Построение матрицы линейного отображения.

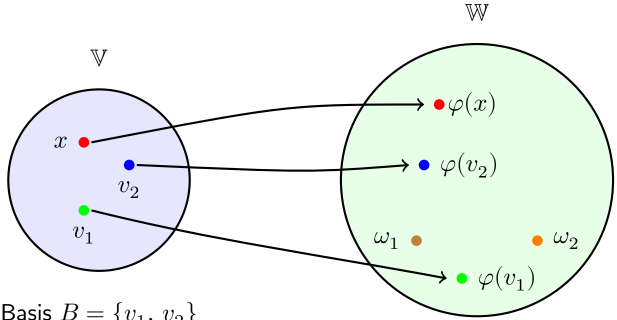
Глеб Карпов

МНаД ФКН ВШЭ

Линейные отоюражения и векторные пространства

Минимальная визуализация

$$\varphi : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$$



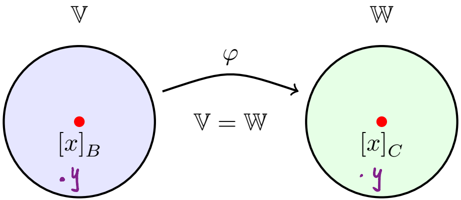
Basis $B = \{v_1, v_2\}$

Basis $C = \{\omega_1, \omega_2\}$

Замена базиса сквозь призму линейного отображения

- Давайте рассмотрим самое глупенькое отображение, которое не делает ничего, кроме как находит копию элемента (identity transformation):

$$\varphi : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W},\ \ \mathbb{W} = \mathbb{V},$$
$$\text{such that } \forall x \in \mathbb{V}\ \varphi(x) = x \in \mathbb{W}$$



$B = \{v_1, v_2\}$ $\qquad$ $C = \{w_1, w_2\}$

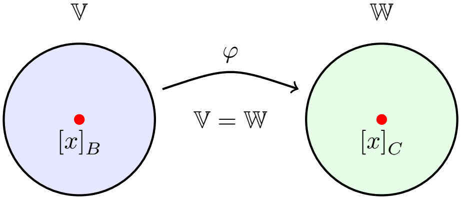
Замена базиса сквозь призму линейного отображения

- Давайте рассмотрим самое глупенькое отображение, которое не делает ничего, кроме как находит копию элемента (identity transformation):

$$\varphi : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}, \;\; \mathbb{W} = \mathbb{V},$$
$$\text{such that } \forall x \in \mathbb{V}\, \varphi(x) = x \in \mathbb{W}$$

$$\varphi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(1+x) = 1+x$$



- Но никто не запрещает использовать разные базисы в разных пространствах. Пусть в пространстве $\mathbb{V}$ у нас действует базис $B = \{v_1, v_2\}$, а в пространстве $\mathbb{W}$ действует базис $C = \{\omega_1, \omega_2\}$.

Замена базиса сквозь призму линейного отображения

$$x = x_1 v_1 + x_2 v_2,$$

$$\varphi(x) = \varphi(x_1 v_1 + x_2 v_2) = x_1 \varphi(v_1) + x_2 \varphi(v_2).$$

Помните, что $\varphi(v_1)$, $\varphi(v_2)$ — это векторы, т.е. абстрактные элементы векторного пространства W.

$$x = x_1 \cdot v_1 + x_2 v_2$$

Замена базиса сквозь призму линейного отображения

Давайте посмотрим на элементы $\varphi(v_1)$, $\varphi(v_2)$ в базисе C:

$$\varphi(v_1) = v_1 = a_{11}\omega_1 + a_{21}\omega_2,$$
$$\varphi(v_2) = v_2 = a_{12}\omega_1 + a_{22}\omega_2$$

$[v_1]_C = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$

$[v_2]_C = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$

Теперь вернемся к $\varphi(x) = x_1\varphi(v_1) + x_2\varphi(v_2) \iff x = x_1 v_1 + x_2 v_2$.

$$\begin{aligned}\varphi(x) = x = x_1\left(a_{11}\omega_1 + a_{21}\omega_2\right) + x_2\left(a_{12}\omega_1 + a_{22}\omega_2\right) &= \\ \left(a_{11}x_1 + a_{12}x_2\right)\omega_1 + \left(a_{21}x_1 + a_{22}x_2\right)\omega_2 &= \\ \gamma_1\omega_1 + \gamma_2\omega_2 &\end{aligned}$$

- Мы получили разложение элемента $\varphi(x) = x$ по базису пространства $\mathbb{W}$. Можем записать координаты как:

$$[\varphi(x)]_C = [x]_C = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix}$$

Умножение матрицы на вектор... снова...

$$\left([\varphi(x)]_C = A_\varphi [x]_B\right)$$

Наконец:

$$[x]_C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A_{B\to C}\,[x]_B\,.$$

Матрица замены координат

Матрица для identity transformation помогает нам связать координаты одного и того же элемента x в двух разных базисах. Эту формулу также называют формулой замены координат.

Примеры

1. $X = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\qquad [X]_S = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\qquad B = \left\{ \begin{array}{cc} v_1 & v_2 \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array} \right\}$

$$X = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad [X]_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}_{A_{B\to S}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{[X]_B} = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}}_{[X]_S}$$

$$[X]_S = A_{B\to S}\,[X]_B$$

$$\left[\, [v_1]_S \,\middle|\, [v_2]_S \,\right] = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[v_1]_S = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \;\Big|\; [v_2]_S = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Примеры

(2)

$S=\{1, X\}$

$B = \{2,\ 1+X\}$

$$[F(X)]_S = A_{B\to S}\,[F(X)]_B$$

$$\begin{pmatrix}7\\5\end{pmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$$

$$A_{B\to S}$$

$$\big[\,[v_1]_S \;\big|\; [v_2]_S\,\big] = \begin{bmatrix}2 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}$$

$$2 = 2\cdot 1 + 0X$$

$$1+X = 1\cdot 1 \quad 1\cdot X$$

$$F(X) = 5X+7 = 1\cdot 2 + 5\cdot(1+X)$$

$$[F(X)]_S = \begin{pmatrix}7\\5\end{pmatrix} \qquad [F(X)]_B = \begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$$

Примеры

3

$$\mathbb{R}[x,1] \xrightarrow{Id(x)} \mathbb{R}[x,1]$$

$$F(x) \mapsto F(x)$$

$B=\{1,x\}$ $\qquad$ $S=\{1,x\}$

$$[F(x)]_S = A_{B\to S}\,[F(x)]_B$$

$$\begin{pmatrix}7\\5\end{pmatrix} = \begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{pmatrix}7\\5\end{pmatrix}$$

$$A_{B\to S}$$

$$\Big[\,[v_1]_S \,\Big|\, [v_2]_S\,\Big] = \begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

$$1 = 1\cdot 1 + 0x$$

$$x = 0\cdot 1 + 1x$$

Примеры

4

$V\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 = W$

S_w

$\varphi\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1+x_2\\2x_2-x_1\end{pmatrix}$

$B = \left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$

S_v

$\varphi\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\5\end{pmatrix}$

$$[\varphi(x)]_C = A_\varphi\,[x]_B$$

$$A_\varphi = \Big[\,[\varphi(v_1)]_S \;\Big|\; [\varphi(v_2)]_S\,\Big] = \begin{bmatrix}1 & 1\\-1 & 2\end{bmatrix}$$

$\begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\5\end{pmatrix}$

$\varphi(v_1) = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ $\quad\varphi(v_2) = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$