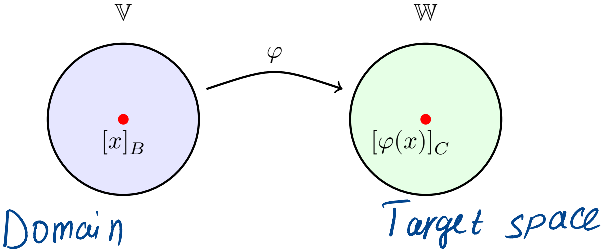
Линейная алгебра
Линейные отображения. Замена базиса.

Глеб Карпов

МНаД ФКН ВШЭ

Линейные отображения

Введение и мотивация



Линейные отображения

Определение

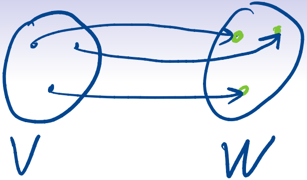
Пусть V, W — векторные пространства. Отображение $\varphi : V \to W$ называется линейным, если

1. $\varphi(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \varphi(\mathbf{u}) + \varphi(\mathbf{v})$ для всех $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$

Свойства 1 и 2 вместе иногда объединяют в одно:

$$\varphi(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) = \alpha\varphi(\mathbf{u}) + \beta\varphi(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Линейные отображения



$u+v=w$

Определение

Пусть V, W — векторные пространства. Отображение $\varphi : V \to W$ называется линейным, если

1. $\varphi(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \varphi(\mathbf{u}) + \varphi(\mathbf{v})$ для всех $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$
2. $\varphi(\alpha\mathbf{v}) = \alpha\varphi(\mathbf{v})$ для всех $\mathbf{v} \in V$ и всех скаляров $\alpha \in \mathbb{R}$.

Свойства 1 и 2 вместе иногда объединяют в одно:

$$\varphi(\alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{v}) = \alpha\varphi(\mathbf{u}) + \beta\varphi(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

$\varphi(w) = \varphi(u) + \varphi(v) = y_1 + y_2 = y_3$

$\alpha u = w$

$\varphi(\alpha u) = \varphi(w) = \alpha \cdot \varphi(u)$

Линейные отображения

Определение

Пусть V, W — векторные пространства. Отображение $\varphi : V \to W$ называется линейным, если

1. $\varphi(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \varphi(\mathbf{u}) + \varphi(\mathbf{v})$ для всех $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$
2. $\varphi(\alpha \mathbf{v}) = \alpha \varphi(\mathbf{v})$ для всех $\mathbf{v} \in V$ и всех скаляров $\alpha \in \mathbb{R}$.

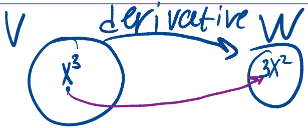
Свойства 1 и 2 вместе иногда объединяют в одно:

$$\varphi(\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}) = \alpha \varphi(\mathbf{u}) + \beta \varphi(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

$$x^3 \xrightarrow{\text{derivative}} 3x^2$$

$$x^2 \to 2x$$

$$x \to 1$$



$$\boxed{\begin{aligned} (f+g)' &= f' + g' \\ (\alpha \cdot f)' &= \alpha \cdot f' \end{aligned}}$$

Аналитическое представление отображения

$$V=\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\varphi} W=\mathbb{R}^2$$

$$\varphi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}; \quad u=\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad x\in V, \; u\in V$$

$$\varphi(x+u) = \varphi(x)+\varphi(u)$$

$$x+u=w=\begin{pmatrix} x_1+u_1 \\ x_2+u_2 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(x)=\begin{pmatrix} 2x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \varphi(u)=\begin{pmatrix} 2u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(w) = \underline{\begin{pmatrix} 2x_1+2u_1 \\ x_2+u_2 \end{pmatrix}}$$

$$\varphi(x)+\varphi(u)=\underline{\begin{pmatrix} 2x_1+2u_1 \\ x_2+u_2 \end{pmatrix}}$$

$$\varphi(\alpha x) = \alpha\varphi(x)$$

$$\underline{\begin{pmatrix} 2\alpha x_1 \\ \alpha x_2 \end{pmatrix}} = \alpha\cdot\begin{pmatrix} 2x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 2\alpha x_1 \\ \alpha x_2 \end{pmatrix}}$$

Матричное представление линейного отображения

$B = \{v_1, v_2\}$ $C = \{w_1, w_2\}$

Предположим, что $\varphi : V \to W$, векторы $v_1 v_2$ образуют базис в V, а векторы ω_1, ω_2 образуют базис в W.

Мы хотим исследовать, как φ действует на произвольный $x \in V$.

опр. базиса

$[x]_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

1.

$$\boxed{x = x_1 v_1 + x_2 v_2,}$$

св-ва лин. ф-ий

$$\varphi(x) = \varphi(x_1 v_1 + x_2 v_2) = x_1 \varphi(v_1) + x_2 \varphi(v_2).$$

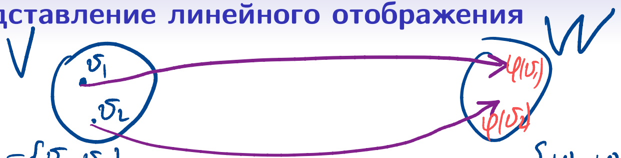
$= \varphi(x_1 v_1) + \varphi(x_2 v_2) = x_1 \cdot \boxed{\varphi(v_1)} + x_2 \cdot \boxed{\varphi(v_2)}$

2

Помните, что $\varphi(v_1)$, $\varphi(v_2)$ — это векторы, т.е. абстрактные элементы векторного пространства W.

$$\varphi(X) = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

Матричное представление линейного отображения



Давайте посмотрим на них в базисе W:

$B = \{v_1, v_2\}$ $\quad$ $\{\omega_1, \omega_2\} = C$

$$\varphi(v_1) = \boxed{a_{11}\omega_1 + a_{21}\omega_2},$$
$$\varphi(v_2) = \boxed{a_{12}\omega_1 + a_{22}\omega_2}$$

$$[\varphi(v_1)]_C = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$$
$$[\varphi(v_2)]_C = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$$

Теперь вернемся к $\boxed{\varphi(x) = x_1\varphi(v_1) + x_2\varphi(v_2).}$

$$\varphi(x) = x_1\left(a_{11}\omega_1 + a_{21}\omega_2\right) + x_2\left(a_{12}\omega_1 + a_{22}\omega_2\right) =$$

$$\varphi(x) = \underbrace{(x_1 a_{11} + x_2 a_{12})}_{\gamma_1} \cdot \omega_1 + \underbrace{(x_1 a_{21} + x_2 a_{22})}_{\gamma_2} \cdot \omega_2$$

$$[\varphi(x)]_C = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}$$

Матричное представление линейного отображения

$$[\varphi(x)]_e = \begin{pmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= x_1\left(a_{11}\omega_1 + a_{21}\omega_2\right) + x_2\left(a_{12}\omega_1 + a_{22}\omega_2\right)\\ &= \underbrace{\left(a_{11}x_1 + a_{12}x_2\right)}_{\gamma_1}\cdot\omega_1 + \underbrace{\left(a_{21}x_1 + a_{22}x_2\right)}_{\gamma_2}\cdot\omega_2\end{aligned}$$

$$\gamma_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2$$

$$\gamma_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2$$

Умножение матрицы на вектор... снова...

$$x \longrightarrow \varphi(x)$$

Наконец:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = [\varphi(x)]_C = \boxed{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}} \boxed{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}} = A_\varphi \boxed{[x]_B}.$$

Wow!