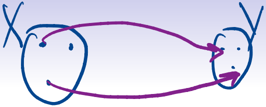
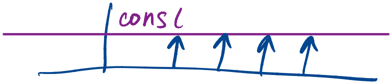




ООФ

ОЗФ

Линейная алгебра

Линейные отображения. Замена базиса.

Domain

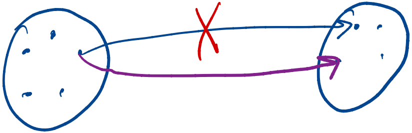
Target space

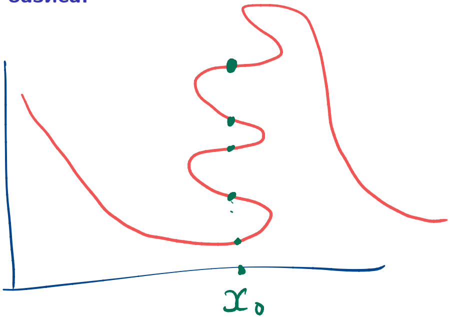
X

Y

Глеб Карпов

МНаД ФКН ВШЭ

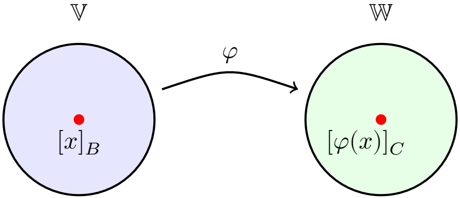




$\forall x \in X \ \exists!\, y \in Y$

Линейные отображения

Введение и мотивация



Линейные отображения

Определение

Пусть V, W — векторные пространства. Отображение $\varphi : V \to W$ называется линейным, если

1. $\varphi(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \varphi(\mathbf{u}) + \varphi(\mathbf{v})$ для всех $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$

Свойства 1 и 2 вместе иногда объединяют в одно:

$$\varphi(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) = \alpha\varphi(\mathbf{u}) + \beta\varphi(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Линейные отображения

② $\alpha v = t\ ;\quad \varphi(t)$

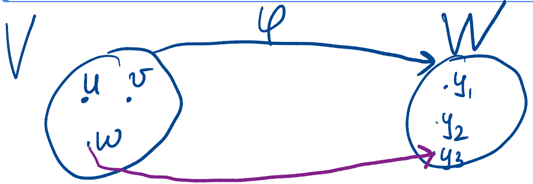
$\varphi(v)\cdot\alpha = \varphi(\alpha v)$

Определение

Пусть V, W — векторные пространства. Отображение $\varphi : V \to W$ называется линейным, если
1. $\varphi(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \varphi(\mathbf{u}) + \varphi(\mathbf{v})$ для всех $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$
2. $\varphi(\alpha\mathbf{v}) = \alpha\varphi(\mathbf{v})$ для всех $\mathbf{v} \in V$ и всех скаляров $\alpha \in \mathbb{R}$.

Свойства 1 и 2 вместе иногда объединяют в одно:

$$\varphi(\alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{v}) = \alpha\varphi(\mathbf{u}) + \beta\varphi(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$



$\varphi(u) = y_1$

$\varphi(v) = y_2$

$\varphi(w) = y_3$

$u + v = w$

$y_3 = y_1 + y_2 = \varphi(u) + \varphi(v)$

Линейные отображения

Определение

Пусть V, W — векторные пространства. Отображение $\varphi : V \to W$ называется линейным, если

1. $\varphi(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \varphi(\mathbf{u}) + \varphi(\mathbf{v})$ для всех $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$
2. $\varphi(\alpha\mathbf{v}) = \alpha\varphi(\mathbf{v})$ для всех $\mathbf{v} \in V$ и всех скаляров $\alpha \in \mathbb{R}$.

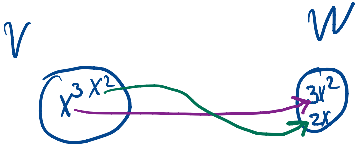
Свойства 1 и 2 вместе иногда объединяют в одно:

$$\varphi(\alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{v}) = \alpha\varphi(\mathbf{u}) + \beta\varphi(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

$x^3 \to 3x^2$

$x^2 \to 2x$

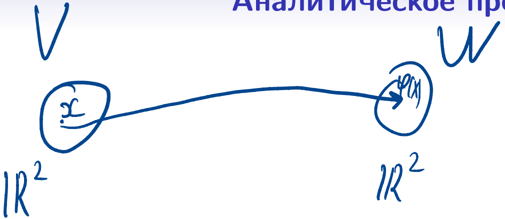
$x \to 1$



$(f(x)+g(x))' = f' + g'$

$(\alpha f(x))' = \alpha \cdot f'(x)$

Аналитическое представление отображения



$$\varphi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$x \in V$

$u \in V \qquad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$

$$\varphi(x+u) = \varphi(x) + \varphi(u)$$

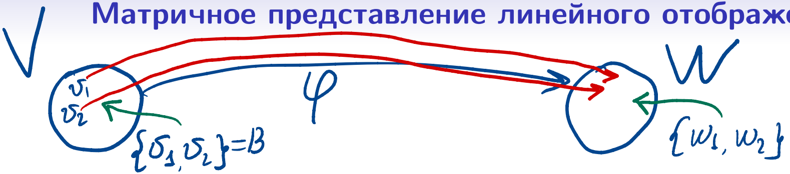
$$\varphi\begin{pmatrix} x_1+u_1 \\ x_2+u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1+2u_1 \\ x_2+u_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1+2u_1 \\ x_2+u_2 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(\alpha x) = \begin{pmatrix} 2\alpha x_1 \\ \alpha x_2 \end{pmatrix}$$

$$\alpha \cdot \varphi(x) = \alpha\begin{pmatrix} 2x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha x_1 \\ \alpha x_2 \end{pmatrix}$$

Матричное представление линейного отображения



Предположим, что $\varphi : V \to W$, векторы $v_1 v_2$ образуют базис в V, а векторы ω_1, ω_2 образуют базис в W.

Мы хотим исследовать, как φ действует на произвольный $x \in V$.

$x \longrightarrow \varphi(x) \in W$

$\in V$

$[x]_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$$\boxed{x = x_1 v_1 + x_2 v_2,}$$

св-ва лин. пр.

$$\varphi(x) = \varphi(x_1 v_1 + x_2 v_2) = x_1 \underbrace{\boxed{\varphi(v_1)}}_{\in W} + x_2 \underbrace{\boxed{\varphi(v_2)}}_{\in W}.$$

Помните, что $\varphi(v_1)$, $\varphi(v_2)$ — это векторы, т.е. абстрактные элементы векторного пространства W.

Матричное представление линейного отображения

Давайте посмотрим на них в базисе W:

$\varphi(v_1) \in W$

$\varphi(v_2) \in W$

$$\boxed{\varphi(v_1) = a_{11}\omega_1 + a_{21}\omega_2,}$$
$$\boxed{\varphi(v_2) = a_{12}\omega_1 + a_{22}\omega_2}$$

$[\varphi(v_1)]_C = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$

$[\varphi(v_2)]_C = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$

Теперь вернемся к $\underline{\varphi(x) = x_1\varphi(v_1) + x_2\varphi(v_2)}$.

$$\varphi(x) = x_1\left(a_{11}\omega_1 + a_{21}\omega_2\right) + x_2\left(a_{12}\omega_1 + a_{22}\omega_2\right) =$$

$$\varphi(X) = \longrightarrow = \underbrace{(a_{11}X_1 + a_{12}X_2)}_{Y_1} \cdot \omega_1 + \underbrace{(a_{21}X_1 + a_{22}X_2)}_{Y_2} \cdot \omega_2$$

Матричное представление линейного отображения

$$\varphi(x) = x_1\left(a_{11}\omega_1 + a_{21}\omega_2\right) + x_2\left(a_{12}\omega_1 + a_{22}\omega_2\right) =$$

$$\varphi(x) = \left(a_{11}x_1 + a_{12}x_2\right)\omega_1 + \left(a_{21}x_1 + a_{22}x_2\right)\omega_2$$

$\in W$ $\qquad \gamma_1 \qquad \gamma_2$

$$[\varphi(x)]_C = \begin{pmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$$

$$\gamma_1 \cdot \omega_1 + \gamma_2 \cdot \omega_2 = \varphi(x)$$

Умножение матрицы на вектор... снова...

$\varphi(x)$ $\qquad\qquad\qquad\qquad x$

Наконец:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} [\varphi(v_1)]_c & [\varphi(v_2)]_c \end{array} \\ [\varphi(x)]_{\mathcal{C}} = & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A_\varphi [x]_{\mathcal{B}}. \end{array}$$

Wow!

$$[\varphi(x)]_C = \left[\begin{array}{c|c} [\varphi(v_1)]_C & [\varphi(v_2)]_C \end{array}\right] \quad [x]_B$$