Линейная алгебра

Проекции. Ортогонализация базиса.

Глеб Карпов

МНаД ФКН ВШЭ

Ортогональные базисы.

Определение

Система векторов $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ называется ортогональной, если любые два вектора взаимно ортогональны, то есть $(\mathbf{v}_j, \mathbf{v}_k) = 0$ при $j \neq k$.
Если дополнительно $\|\mathbf{v}_k\| = 1$ для всех k, то система называется ортонормированной.

Зачем это нужно?

$B = \{v_1, \dots, v_n\}$

$[x]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$

$$\mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_n \mathbf{v}_n = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mathbf{v}_j$$

Взяв скалярное произведение обеих частей равенства с $\mathbf{v}_1$, получаем

$$(\mathbf{x}, \mathbf{v}_1) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \left(\mathbf{v}_j, \mathbf{v}_1\right) = \alpha_1 \left(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1\right) = \alpha_1 \left\|\mathbf{v}_1\right\|^2$$

$(\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n, v_1) = \alpha_1 (v_1, v_1) + \alpha_2 (v_2, v_1) + \ldots + \alpha_n (v_n, v_1) \to 0$

Аналогично, беря скалярное произведение обеих частей с $\mathbf{v}_k$, получаем

$$(\mathbf{x}, \mathbf{v}_k) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \left(\mathbf{v}_j, \mathbf{v}_k\right) = \alpha_k \left(\mathbf{v}_k, \mathbf{v}_k\right) = \alpha_k \left\|\mathbf{v}_k\right\|^2$$

$P_{v \to s} [x]_B = [x]$

Итак

$$\alpha_k = \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{v}_k)}{\left\|\mathbf{v}_k\right\|^2}$$

$\|v_k\| = 1, \ \forall k$

$Ax = b$, $A = QR$

Зачем это нужно?

$QRx = b$

$$\mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_n \mathbf{v}_n = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mathbf{v}_j$$

Взяв скалярное произведение обеих частей равенства с $\mathbf{v}_1$, получаем

$$(\mathbf{x}, \mathbf{v}_1) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \left(\mathbf{v}_j, \mathbf{v}_1\right) = \alpha_1 \left(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1\right) = \alpha_1 \left\|\mathbf{v}_1\right\|^2$$

$Rx = y$

Аналогично, беря скалярное произведение обеих частей с $\mathbf{v}_k$, получаем

$$(\mathbf{x}, \mathbf{v}_k) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \left(\mathbf{v}_j, \mathbf{v}_k\right) = \alpha_k \left(\mathbf{v}_k, \mathbf{v}_k\right) = \alpha_k \left\|\mathbf{v}_k\right\|^2$$

$R =$ 

x V

Итак

$Qy = b \to y$

$$\alpha_k = \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{v}_k)}{\left\|\mathbf{v}_k\right\|^2}$$

Проекции

Ортогональная проекция на вектор.

Определение (ортогональная проекция)

Пусть $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Обозначим единичный вектор в направлении $\mathbf{x}$ как

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}.$$

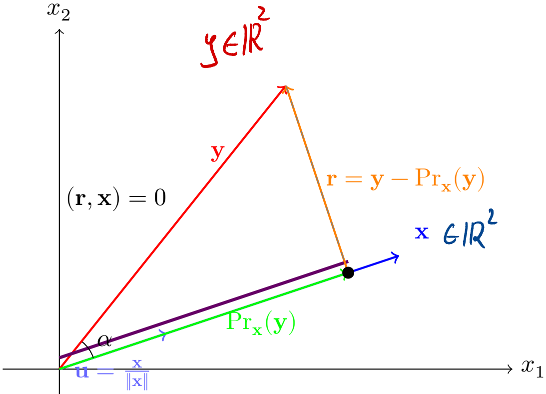
Ортогональная проекция вектора $\mathbf{y}$ на направление $\mathbf{x}$ (обозначение: $\mathrm{Pr}_{\mathbf{x}}(\mathbf{y})$) равна

$$\mathop{\mathrm{Pr}}_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = (\mathbf{y}, \mathbf{u})\,\mathbf{u} = \frac{(\mathbf{y}, \mathbf{x})}{\|\mathbf{x}\|^2}\,\mathbf{x}.$$

Сопряжённый (ортогональный) остаток:

$$\mathbf{r} = \mathbf{y} - \mathop{\mathrm{Pr}}_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}), \qquad (\mathbf{r}, \mathbf{x}) = 0.$$

Пример: ортогональная проекция



$$\mathrm{Pr}_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = \frac{(\mathbf{y}, \mathbf{x})}{\|\mathbf{x}\|^2}\mathbf{x}$$

$$u = \frac{x}{\|x\|_2}$$

$$\|u\|_2 = \sqrt{\left(\frac{x_1}{\|x\|}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{x_n}{\|x\|}\right)^2} = \frac{\|x\|}{\|x\|} = 1$$

$$Pr_x(\mathbf{y}) = \frac{(\mathbf{y}, \mathbf{x})}{\|\mathbf{x}\|^2}\mathbf{x} = \frac{(\mathbf{y}, \mathbf{x})}{\|\mathbf{x}\|_2} \cdot \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_2} = \frac{\|\mathbf{y}\|_2 \cancel{\|\mathbf{x}\|_2} \cos(\alpha)}{\cancel{\|\mathbf{x}\|_2}} \cdot \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_2} = \|\mathbf{y}\|_2 \cos(\alpha) \cdot \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_2}$$

Алгоритм Грама-Шмидта

Вход: линейно независимые векторы $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k$.

Шаги ортогонализации:

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{x}_1,$$

$V_2 = X_2 - Pr_{V_1}(X_2)$

$$\mathbf{v}_m = \mathbf{x}_m - \sum_{j=1}^{m-1} \frac{(\mathbf{x}_m, \mathbf{v}_j)}{\|\mathbf{v}_j\|^2} \mathbf{v}_j, \quad m = 2, \ldots, k.$$

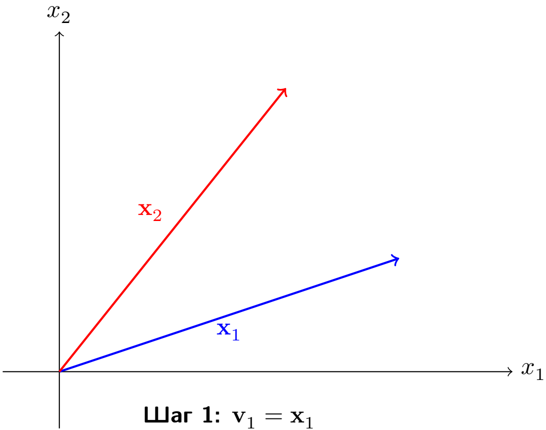
$V_3 = X_3 - Pr_{V_1}(X_3) - Pr_{V_2}(X_3)$

Получаем ортогональную систему $\{\mathbf{v}_j\}$ с теми же линейными оболочками: $\mathrm{span}\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\} = \mathrm{span}\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m\}$.

Нормировка (получение ортонормированного базиса):

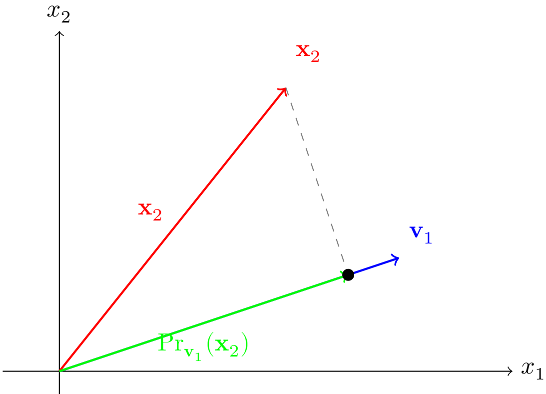
$$\mathbf{e}_m = \frac{\mathbf{v}_m}{\|\mathbf{v}_m\|}, \quad m = 1, \ldots, k.$$

Шаг 1: Исходные векторы



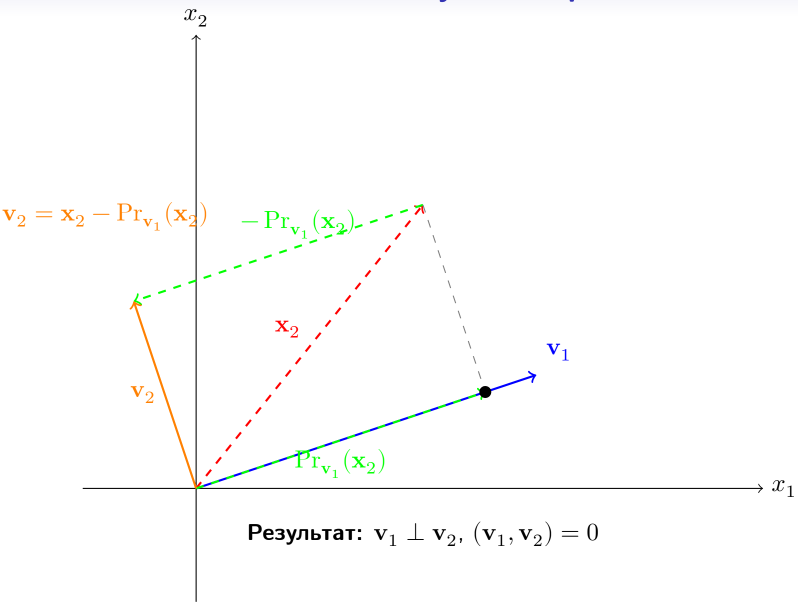
Шаг 1: $\mathbf{v}_1 = \mathbf{x}_1$

Шаг 2: Вычисление проекции



$$\mathrm{Pr}_{\mathbf{v}_1}(\mathbf{x}_2) = \frac{(\mathbf{x}_2, \mathbf{v}_1)}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1$$

Шаг 3: Получение ортогонального вектора



Результат: $\mathbf{v}_1 \perp \mathbf{v}_2$, $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = 0$

Пример

$$\begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array}$$

Ортогонализовать набор векторов $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

$$1 \quad v_1 = x_1 \longrightarrow 2 \quad x_2 - Pr_{v_1}(x_2) = x_2 - \frac{(x_2, v_1)}{\|v_1\|^2} \cdot v_1 =$$

$$(x_2, v_1) = (x_2, x_1) = 3$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{3}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = v_2$$

$$\|v_1\|^2 = \langle v_1, v_1 \rangle = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 3$$

$$\langle v_1, v_2 \rangle = -1 + 0 + 1 = 0$$

Слайд для записей

③ $v_3 = x_3 - Pr_{v_1}(x_3) - Pr_{v_2}(x_3) = x_3 - \dfrac{(v_1, x_3)}{\|v_1\|^2} \cdot v_1 - \dfrac{(v_2, x_3)}{\|v_2\|^2} \cdot v_2 =$

$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \langle v_1, x_3 \rangle = 3$

$\boxed{v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$ $\quad \langle v_2, x_3 \rangle = 1$

$x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad \|v_1\|^2 = 3$

$\|v_2\|^2 = 2$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{3}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1 \\ 1/2 \end{pmatrix} = v_3$$

$\langle v_2, v_2 \rangle = a_1 \cdot a_1 + \ldots + a_n \cdot a_n = \|v_2\|^2 = v_2^T v_2$

$(-1)^2 + 0 + 1^2 = 2$

Слайд для записей

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} 1/2 \\ -1 \\ 1/2 \end{pmatrix} = v_3$$

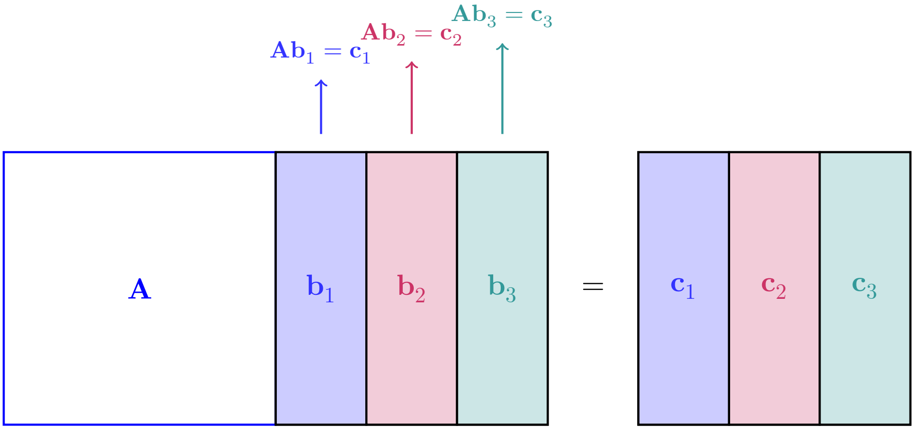
$$(v_1, v_3) = 1/2 - 1 + 1/2 = 0$$

$$(v_2, v_3) = -1/2 + 0 + 1/2 = 0$$

$$e_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|_2} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$e_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|_2} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Обращение матриц через СЛУ: Идея



Матрица A **Матрица B** **Результат C**

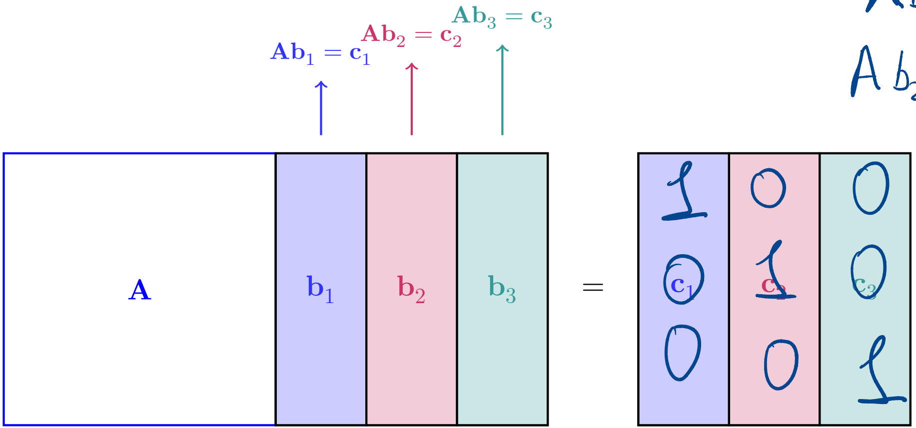
A A^{-1} I

Обращение матриц через СЛУ: Идея

$$Ab_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$Ab_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$Ab_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$



Матрица A — A

Матрица B — A^{-1}

Результат C — I

Три системы линейных уравнений

$$\mathbf{A}[\mathbf{x}_1|\mathbf{x}_2|\mathbf{x}_3] = [\mathbf{e}_1|\mathbf{e}_2|\mathbf{e}_3] = \mathbf{I}$$

Результат

Объединяем

$\uparrow$

$\mathbf{A}\mathbf{x}_1 = \mathbf{e}_1$	$\mathbf{A}\mathbf{x}_2 = \mathbf{e}_2$	$\mathbf{A}\mathbf{x}_3 = \mathbf{e}_3$
Система 1	**Система 2**	**Система 3**

$$Ax_1 = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left[A \,\middle|\, \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & & a_1 \\ 0 & 1 & & a_2 \\ & & 1 & a_3 \end{array}\right]$$

$$X = \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{matrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \qquad \begin{matrix} t_1 = 2 \\ t_2 = 4 \end{matrix}$$

Три системы линейных уравнений

$$\mathbf{A}[\mathbf{x}_1|\mathbf{x}_2|\mathbf{x}_3] = [\mathbf{e}_1|\mathbf{e}_2|\mathbf{e}_3] = \mathbf{I}$$

Результат

Объединяем

$\uparrow$

$\mathbf{A}\mathbf{x}_1 = \mathbf{e}_1$	$\mathbf{A}\mathbf{x}_2 = \mathbf{e}_2$	$\mathbf{A}\mathbf{x}_3 = \mathbf{e}_3$
Система 1	**Система 2**	**Система 3**

$$A x_1 = e_1$$
$$A x_2 = e_2$$
$$A x_3 = e_3$$

$$\left[\begin{array}{c|ccc} A & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

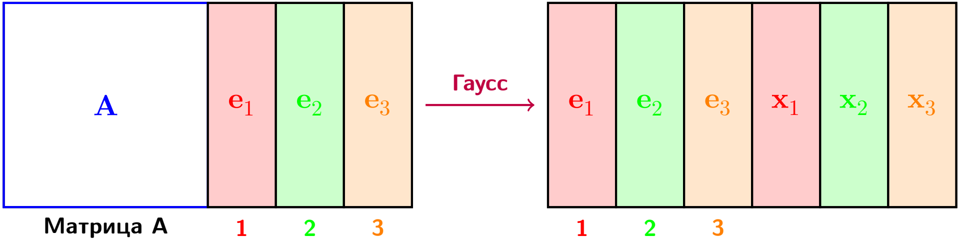
$$\downarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & & x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \end{array}\right]$$

Визуализация расширенной матрицы

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{array}\right)$$



$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & -1/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}[\mathbf{x}_1|\mathbf{x}_2|\mathbf{x}_3] = [\mathbf{e}_1|\mathbf{e}_2|\mathbf{e}_3] = \mathbf{I}$$

$$\Rightarrow \quad [\mathbf{x}_1|\mathbf{x}_2|\mathbf{x}_3] = \mathbf{A}^{-1}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/4 \end{array}\right) {}^{-1/2 R_2} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/2 & -1/8 \\ 0 & 1 & 0 & 1/4 \end{array}\right)$$

Пример: Обращение матрицы 3x3

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Слайд для записей