Линейная алгебра

Проекции. Ортогонализация базиса.

Глеб Карпов

МНаД ФКН ВШЭ

Ортогональные базисы.

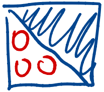
Определение

Система векторов $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ называется ортогональной, если любые два вектора взаимно ортогональны, то есть $(\mathbf{v}_j, \mathbf{v}_k) = 0$ при $j \neq k$.
Если дополнительно $\|\mathbf{v}_k\| = 1$ для всех k, то система называется ортонормированной.

$Ax=b$

$A=QR$

ortho



Зачем это нужно?

$B=(v_1,\dots,v_n)$

$[x]_B = \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots \\ \alpha_n\end{pmatrix}$

$$\mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_n \mathbf{v}_n = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mathbf{v}_j$$

Взяв скалярное произведение обеих частей равенства с $\mathbf{v}_1$, получаем

$$(\mathbf{x}, \mathbf{v}_1) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j (\mathbf{v}_j, \mathbf{v}_1) = \boxed{\alpha_1 (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1) = \alpha_1 \|\mathbf{v}_1\|^2}$$

$(\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n, v_1) = \alpha_1 (v_1, v_1) + \alpha_2 \cancel{(v_2, v_1)} + \ldots + \alpha_n \cancel{(v_n, v_1)} \to 0$

Аналогично, беря скалярное произведение обеих частей с $\mathbf{v}_k$, получаем

$$(\mathbf{x}, \mathbf{v}_k) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j (\mathbf{v}_j, \mathbf{v}_k) = \alpha_k (\mathbf{v}_k, \mathbf{v}_k) = \alpha_k \|\mathbf{v}_k\|^2$$

$P_{B\to S}[x]_B = [x]$

Итак

$$\alpha_k = \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{v}_k)}{\|\mathbf{v}_k\|^2}$$

$QRx=b$

$Qy=b \to Rx=y$

Проекции

Ортогональная проекция на вектор.

Определение (ортогональная проекция)

Пусть $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Обозначим единичный вектор в направлении $\mathbf{x}$ как

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}.$$

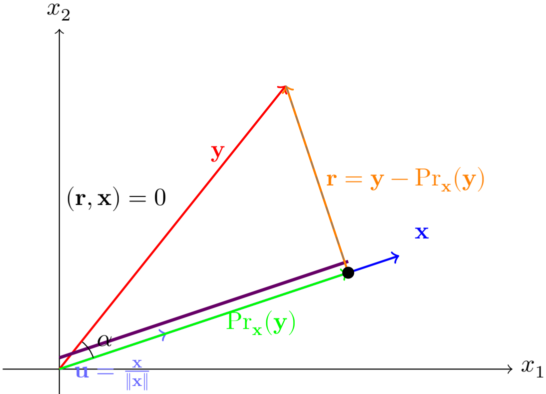
Ортогональная проекция вектора $\mathbf{y}$ на направление $\mathbf{x}$ (обозначение: $\mathrm{Pr}_{\mathbf{x}}(\mathbf{y})$) равна

$$\Pr_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = (\mathbf{y}, \mathbf{u})\,\mathbf{u} = \frac{(\mathbf{y}, \mathbf{x})}{\|\mathbf{x}\|^2}\,\mathbf{x}.$$

Сопряжённый (ортогональный) остаток:

$$\mathbf{r} = \mathbf{y} - \Pr_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}), \qquad (\mathbf{r}, \mathbf{x}) = 0.$$

Пример: ортогональная проекция



$$\mathrm{Pr}_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = \frac{(\mathbf{y},\mathbf{x})}{\|\mathbf{x}\|^2}\mathbf{x}$$

$$u = \frac{v}{\|v\|_2}$$

$$\|u\|_2 = \sqrt{\left(\frac{v_1}{\|v\|}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{v_n}{\|v\|}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{v_1^2 + \ldots + v_n^2}{v_1^2 + \ldots + v_n^2}} = 1$$

$$Pr_x(\mathbf{y}) = \frac{(\mathbf{y},\mathbf{x})}{\|\mathbf{x}\|^2}\mathbf{x} = \frac{(\mathbf{y},\mathbf{x})}{\|\mathbf{x}\|_2} \cdot \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_2} = \frac{\|\mathbf{y}\|_2 \cancel{\|\mathbf{x}\|_2} \cos(\alpha)}{\cancel{\|\mathbf{x}\|_2}} \cdot \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_2} = \|\mathbf{y}\|_2 \cos(\alpha) \cdot \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_2}$$

Алгоритм Грама-Шмидта

Вход: линейно независимые векторы $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$.

Шаги ортогонализации:

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{x}_1, \qquad V_2 = X_2 - Pr_{V_1}(X_2), \quad V_3 = X_3 - Pr_{V_1}(X_3) - Pr_{V_2}(X_3)$$

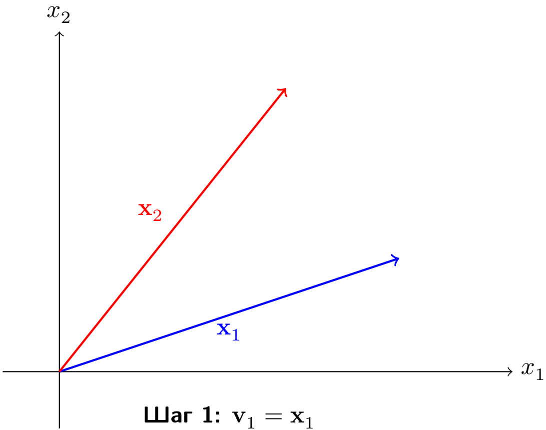
$$\mathbf{v}_m = \mathbf{x}_m - \sum_{j=1}^{m-1} \frac{(\mathbf{x}_m, \mathbf{v}_j)}{\|\mathbf{v}_j\|^2} \mathbf{v}_j, \quad m = 2, \dots, k.$$

Получаем ортогональную систему $\{\mathbf{v}_j\}$ с теми же линейными оболочками: $\mathrm{span}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\} = \mathrm{span}\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m\}$.

Нормировка (получение ортонормированного базиса):

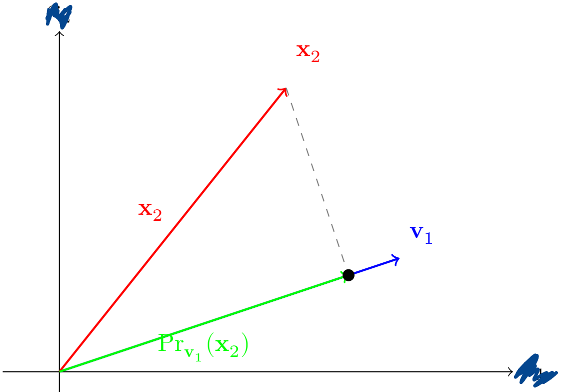
$$\mathbf{e}_m = \frac{\mathbf{v}_m}{\|\mathbf{v}_m\|}, \quad m = 1, \dots, k.$$

Шаг 1: Исходные векторы



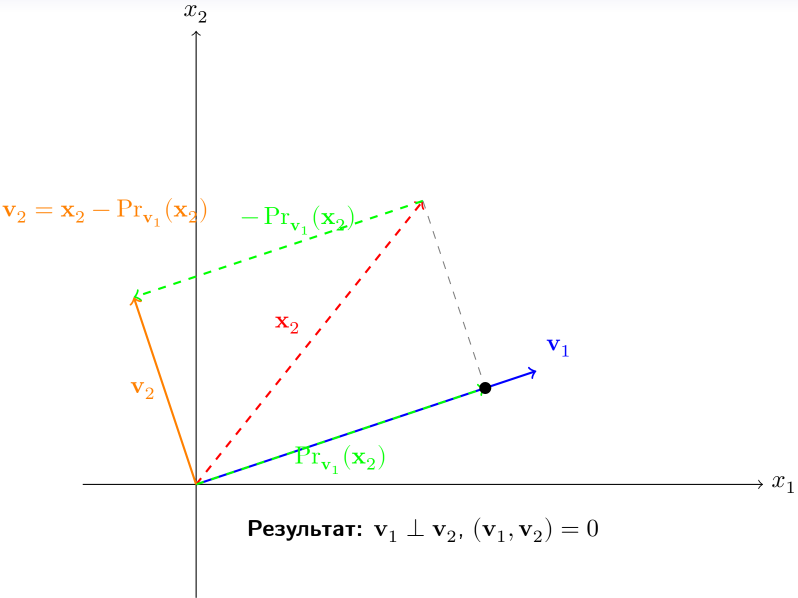
Шаг 1: $\mathbf{v}_1 = \mathbf{x}_1$

Шаг 2: Вычисление проекции



$$\mathrm{Pr}_{\mathbf{v}_1}(\mathbf{x}_2) = \frac{(\mathbf{x}_2, \mathbf{v}_1)}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1$$

Шаг 3: Получение ортогонального вектора



Результат: $\mathbf{v}_1 \perp \mathbf{v}_2$, $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = 0$

Пример

Ортогонализовать набор векторов $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

$v_1 = x_1 \quad x_2 \quad x_3$

① $v_1 = x_1$ ② $v_2 = x_2 - Pr_{v_1}(x_2) = x_2 - \dfrac{(x_2, v_1)}{\|v_1\|^2} \cdot v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \dfrac{3}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = v_2$

$(x_2, v_1) = 3 = $

$= 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 3$

$\|v_1\|^2 = \langle v_1, v_1 \rangle = 3$

$\langle v_1, v_2 \rangle = -1 + 0 + 1 = 0$

$\langle v_1, v_3 \rangle = 1/2 - 1 + 1/2 = 0, \ \langle v_2, v_3 \rangle = 0$

③ $x_3 - Pr_{v_1}(x_3) - Pr_{v_2}(x_3) = x_3 - \dfrac{(x_3, v_1)}{\|v_1\|^2} \cdot v_1 - \dfrac{(x_3, v_2)}{\|v_2\|^2} \cdot v_2$

$\langle x_3, v_1 \rangle = 3$

$\langle x_3, v_2 \rangle = 1$

$\|v_2\|^2 = 2$

$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \dfrac{3}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$

Слайд для записей

$$rhs = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1/2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1/2 & 4 \end{array}\right)}\begin{array}{l} \\ -R_1 \\ -R_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1/2 & 2 \\ 0 & 1 & -3/2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ -2R_2 \end{array} \sim$$

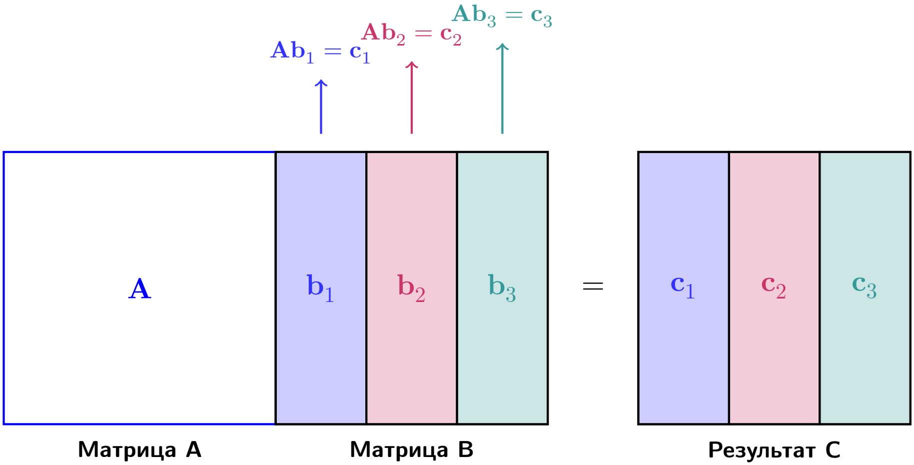
$$P_{0\to s} \cdot [X]_0 = [X]$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1/2 & 2 \\ 0 & 1 & -3/2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} X_1 = 2 \\ X_2 = 1 \\ X_3 = 2 \end{array}$$

$$\alpha_1 = \frac{(rhs, v_1)}{\|v_1\|^2} = \frac{6}{3} = 2$$

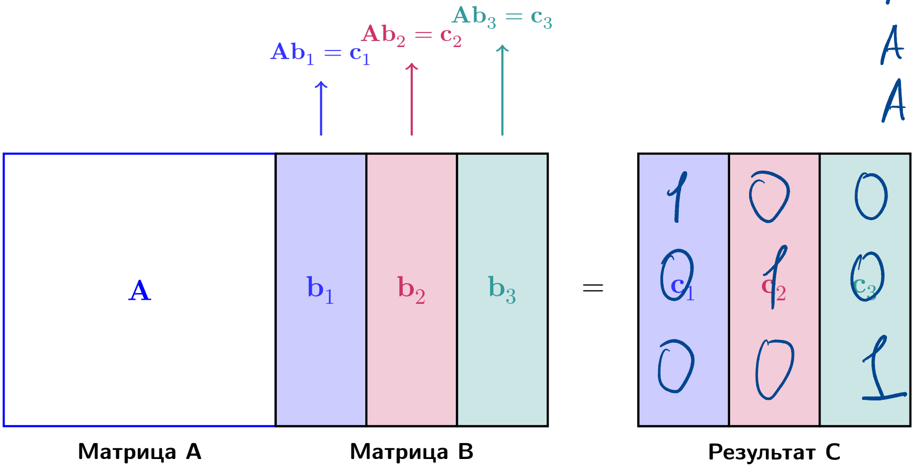
$$\alpha_2 = \frac{(rhs, v_2)}{\|v_2\|^2} = \frac{2}{2} = 1$$

Обращение матриц через СЛУ: Идея



Обращение матриц через СЛУ: Идея

$$A b_1 = e_1$$
$$A b_2 = e_2$$
$$A b_3 = e_3$$



$$A \quad A^{-1} = I$$

Три системы линейных уравнений

$$\mathbf{A}[\mathbf{x}_1|\mathbf{x}_2|\mathbf{x}_3] = [\mathbf{e}_1|\mathbf{e}_2|\mathbf{e}_3] = \mathbf{I}$$

Результат

Объединяем

$$\uparrow$$

$\mathbf{A}\mathbf{x}_1 = \mathbf{e}_1$	$\mathbf{A}\mathbf{x}_2 = \mathbf{e}_2$	$\mathbf{A}\mathbf{x}_3 = \mathbf{e}_3$
Система 1	**Система 2**	**Система 3**

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

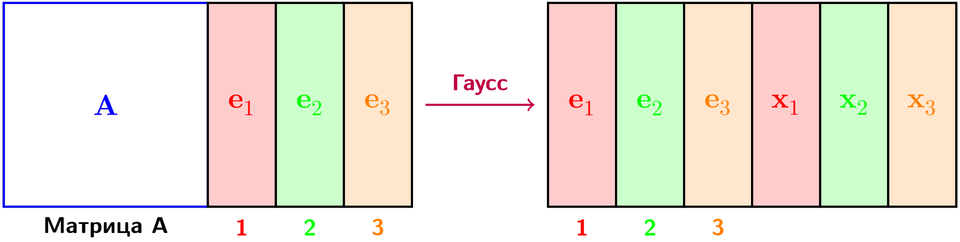
$$t_1 = 1 \qquad t_2 = 2$$

$$\left[A \,\middle|\, \begin{matrix} 1 \\ 8 \end{matrix}\right] \sim \left[\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \,\middle|\, b_1\right]$$

$$Ab_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left[A \,\middle|\, \begin{matrix} 0 \\ b \end{matrix}\right] \sim \left[\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \,\middle|\, b_2\right]$$

Визуализация расширенной матрицы



$$\mathbf{A}[\mathbf{x}_1|\mathbf{x}_2|\mathbf{x}_3] = [\mathbf{e}_1|\mathbf{e}_2|\mathbf{e}_3] = \mathbf{I}$$

$$\Rightarrow \quad [\mathbf{x}_1|\mathbf{x}_2|\mathbf{x}_3] = \mathbf{A}^{-1}$$

$$\left[\begin{array}{c|ccc} A & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{c|c} I & A^{-1} \end{array}\right]$$

$$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad b_1|b_2|b_3$$

Пример: Обращение матрицы 3x3

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{-R_1}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right) \underset{\cdot(-1/2)}{\overset{\cdot 1/2}{\sim}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & -1/2 \end{array}\right)^{-2R_2} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1/2 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 & -1/2 \end{array}\right)$$

Слайд для записей