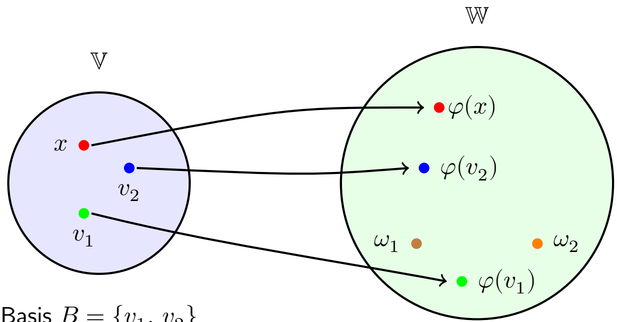
Линейные отображения и векторные пространства

Действующие лица

$$\varphi : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$$



Basis $B = \{v_1, v_2\}$

Basis $C = \{\omega_1, \omega_2\}$

Напоминание: построение матрицы линейного отображения

- Для определения значения функции нам необходимо только знать значения функции от базисных векторов: $\varphi(x) = \varphi(x_1 v_1 + x_2 v_2) = x_1 \boxed{\varphi(v_1)} + x_2 \boxed{\varphi(v_2)}$
- Образы базисных векторов возможно разложить по базису в пространстве $\mathbb{W}$:

$$\varphi(v_1) = a_{11}\omega_1 + a_{21}\omega_2,\ [\varphi(v_1)]_C = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$$

$$\varphi(v_2) = a_{12}\omega_1 + a_{22}\omega_2,\ [\varphi(v_2)]_C = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$$

$\gamma_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2$

- В результате получаем разложение $\varphi(x)$ по базису в пространстве $\mathbb{W}$: $\varphi(x) = \gamma_1\omega_1 + \gamma_2\omega_2$, где:

$$[\varphi(x)]_C = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \boxed{L_{\varphi,(B,C)}\,[x]_B}$$

$$[\varphi(x)]_C = L_{\varphi,(B,C)} \cdot [x]_B$$

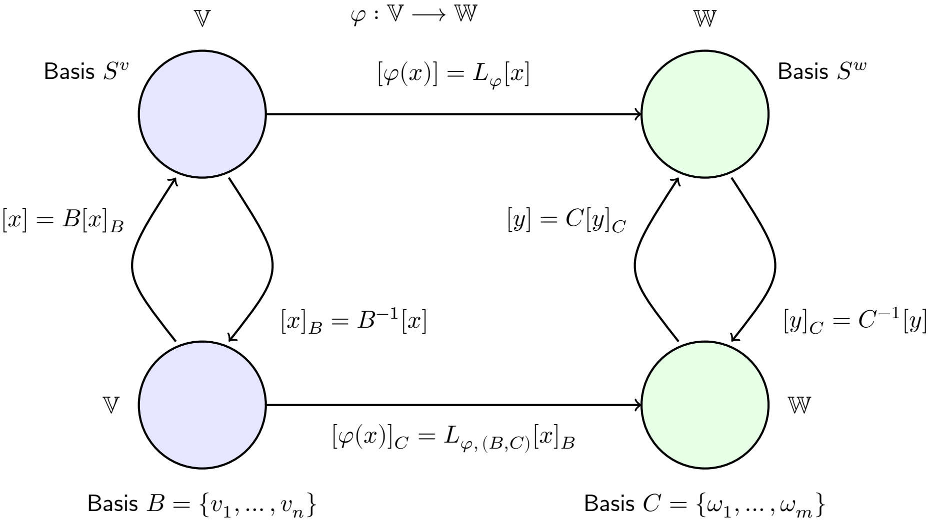
Устройство матрицы линейного отображения

- Если обобщать наш игрушечный пример, то

$$L_{\varphi,\,(B,C)} = \begin{pmatrix} | & | & \cdots & | \\ [\varphi(v_1)]_C & [\varphi(v_2)]_C & \cdots & [\varphi(v_n)]_C \\ | & | & \cdots & | \end{pmatrix},\ L_{\varphi,\,(B,C)} \in \mathbb{R}^{m\times n},$$

  где $[\varphi(v_i)]_C$ — это координаты образа базисного вектора v_i в базисе C.
- Базис $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ действует в области определения (пространстве аргументов) функции $\mathbb{V}$, базис $C = \{\omega_1, \dots, \omega_m\}$ действует в пространстве значений функции $\mathbb{W}$.

Изменение матрицы отображения при изменении базисов пространств



Изменение матрицы отображения при изменении базисов пространств

Ура, мы добрались!

- Подключаем наши знания о переходах между базисами. Пусть следующие матрицы выполняют переходы из базисов B и C в стандартные:

$$[x] = P_{B \to S^v}[x]_B = B[x]_B, \quad [y] = P_{C \to S^w}[y]_C = C[y]_C$$

- Подставим выражения в известную формулу $[\varphi(x)] = L_\varphi[x]$:

$$C[\varphi(x)]_C = L_\varphi B[x]_B$$

- Используем трюк с обратной матрицей:

$$[\varphi(x)]_C = C^{-1} L_\varphi B[x]_B = L_{\varphi,\,(B,C)}[x]_B$$

- Финально, формула для изменения матрицы линейного отображения при одновременном изменении пары базисов из стандартного:

$$\boxed{L_{\varphi,\,(B,C)} = C^{-1} L_\varphi B}$$

$$P_{B \to S} = B$$

$$L_{\varphi,(B,S^w)} = L_\varphi \cdot B$$

$$P_{C \to S} = C$$

$$L_{\varphi,(S^v,C)} = C^{-1} \cdot L_\varphi$$

1. Дано линейное отображение $\varphi : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$, $\mathbb{V} = \mathbb{W} = \mathbb{R}^3$, и представлено как:

$$\varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_3 \\ x_1 + x_3 \end{pmatrix}$$

Найдите матрицу A_φ, которая реализует φ в паре стандартных базисов. Покажите, что это работает на конкретном векторе, то есть сравните результаты подсчета через аналитическую формулу и матрично-векторное умножение.

$$\mathbb{V} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{W}$$

Basis set: $S^V = \{s_1^V, s_2^V, s_3^V\}$

Basis set: $S^W = \{s_1^W, s_2^W, s_3^W\}$

$$A_\varphi = \left(\boxed{[\varphi(s_1^V)]} \;\Big|\; \boxed{[\varphi(s_2^V)]} \;\Big|\; \boxed{[\varphi(s_3^V)]} \right)$$

$$s_1^V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi(s_1^V) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad [\varphi(s_1^V)] = \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$$s_2^V = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi(s_2^V) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad [\varphi(s_2^V)] = \boxed{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

$$s_3^V = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \varphi(s_3^V) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad [\varphi(s_3^V)] = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \varphi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_3 \\ x_1 + x_3 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \varphi(X) = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

$$[\varphi(X)] = A_\varphi [X]$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A_\varphi} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}_{[X]} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}}_{[\varphi(X)]}$$

$$V \longrightarrow W$$

$V \quad S^V = \{1, X\}$ $\qquad$ $W \quad S^W = \{1, X\}$

$\mathbb{R}[X, 1]$ $\qquad$ $\mathbb{R}[X, 1]$

$1 - X$

$2 + 2X$

$$\varphi(a_0 + a_1 X) = \left(2a_0 + (a_0 + a_1)X\right)$$

$$\varphi(1 + 1 \cdot X) = 2 \cdot 1 + 2 \cdot X$$

$$A_\varphi = \left[\boxed{[\varphi(s_1^V)]} \;\middle|\; \boxed{[\varphi(s_2^V)]} \right] = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(1) = \varphi(1 \cdot 1 + 0 \cdot X) = 2 + 1 \cdot X$$

$$[\varphi(1)] = \boxed{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$$\varphi(X) = \varphi(0 + 1 \cdot X) = 2 \cdot 0 + (1 + 0)X = X$$

$$[\varphi(X)] = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$$F = 2 - 3X; \quad \varphi(F) = 4 - 1X$$

$$\underset{A_\varphi}{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} \underset{[F]}{\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}} = \underset{[\varphi(F)]}{\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

$$F = 2 - 3X \,; \quad \varphi(F) = 4 - 1X$$

$$\varphi(a_0 + a_1 X) = \big(2a_0 + (a_0 + a_1)X\big)$$

2. Дано линейное отображение $\varphi : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$, $\mathbb{V} = \mathbb{W} = \mathbb{R}^2$, и представлено:

$$\varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 + x_2 \\ x_1 - 2x_2 \end{pmatrix}$$

(a) Найдите матрицу A_φ, которая реализует φ в паре стандартных базисов,

(b) Пусть сначала мы совершаем переход в базис $\mathcal{B}$ в domain пространстве $\mathbb{V}$. Найдите новый вид матрицы линейного отображения $A_{\varphi,(\mathcal{B},\mathcal{S}^w)}$, которая соответствует φ, если $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$.

(c) Пусть мы далее совершаем переход в базис $\mathcal{C}$ в target пространстве $\mathbb{W}$. Найдите новый вид матрицы линейного отображения $A_{\varphi,(\mathcal{B},\mathcal{C})}$, которая соответствует φ, если $\mathcal{C} = \mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$.

Проверяйте себя на каждом шаге: возьмите конкретный вектор и сравните результаты подсчета через аналитическую формулу и матрично-векторное умножение.

$$\mathbb{V} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{W}$$

a.

$$A_\varphi = \left(\boxed{[\varphi(s_1^V)]} \;\Big|\; \boxed{[\varphi(s_2^V)]} \right)$$

$$s_1^V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi(s_1^V) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad [\varphi(s_1^V)] = \boxed{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$$s_2^V = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \varphi(s_2^V) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad [\varphi(s^V)] = \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}}$$

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Check:

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \varphi(x) = \begin{pmatrix} 10 \\ -13 \end{pmatrix}, \quad \checkmark$$

$$\varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 + x_2 \\ x_1 - 2x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -13 \end{pmatrix}$$

b

$$V \xrightarrow{\varphi} W$$

Basis set

$B = \{b_1, b_2\}$ $S^w = \{s_1^w, s_2^w\}$

1 опция

$$A_{\varphi,(B,S^w)} = \left(\boxed{[\varphi(b_1)]_{S^w}} \;\middle|\; \boxed{[\varphi(b_2)]_{S^w}} \right)$$

$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \varphi\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad [\varphi(b_1)] = \boxed{\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}}$

$b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \varphi\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad [\varphi(b_2)] = \boxed{\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}}$

$$A_{\varphi,(B,S^w)} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$\checkmark$

2 опция: Коррекция матрицы.

$$A_{\varphi,(B,S^w)} = A_\varphi \cdot P_{B\to S} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Check:

$X = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \varphi(X) = \begin{pmatrix} 13 \\ -5 \end{pmatrix} \qquad X = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \to [X]_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\varphi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 + x_2 \\ x_1 - 2x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{[X]_B} = \underbrace{\begin{pmatrix} 13 \\ -5 \end{pmatrix}}_{[\varphi(X)]} \checkmark$$

C. $V \xrightarrow{\varphi} W$

Basis set

$B = \{b_1, b_2\}$ $\qquad$ $C = \{c_1, c_2\}$, $\quad c_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

1 опция

$$A_{\varphi,(B,C)} = \left(\boxed{[\varphi(b_1)]_c} \;\middle|\; \boxed{[\varphi(b_2)]_c} \right)$$

$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \varphi\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad [\varphi(b_1)] = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

$b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \varphi\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad [\varphi(b_2)] = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$

$P_{C \to S}[a]_c = [a], \quad P_{C \to S} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad P^{-1}_{C \to S} P_{C \to S} [a_c] = P^{-1}_{C \to S} [a]$

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \end{array}\right)_{-R_1} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -5 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} t_2 = -5 \\ t_1 = 9 \end{array} \qquad [\varphi(b_1)]_c = \boxed{\begin{pmatrix} 9 \\ -5 \end{pmatrix}}$

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & -3 \end{array}\right)_{-R_1} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -8 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} t_2 = -8 \\ t_1 = 13 \end{array} \qquad [\varphi(b_2)]_c = \boxed{\begin{pmatrix} 13 \\ -8 \end{pmatrix}}$

$$A_{\varphi,(B,C)} = \begin{pmatrix} 9 & 13 \\ -5 & -8 \end{pmatrix}$$

2 опция: Коррекция матрицы.

$$A_{\varphi,(B,C)} = \left(P_{C\to S}\right)^{-1} A_\varphi \cdot P_{B\to S} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 13 \\ -5 & -8 \end{pmatrix} \checkmark$$

Check:

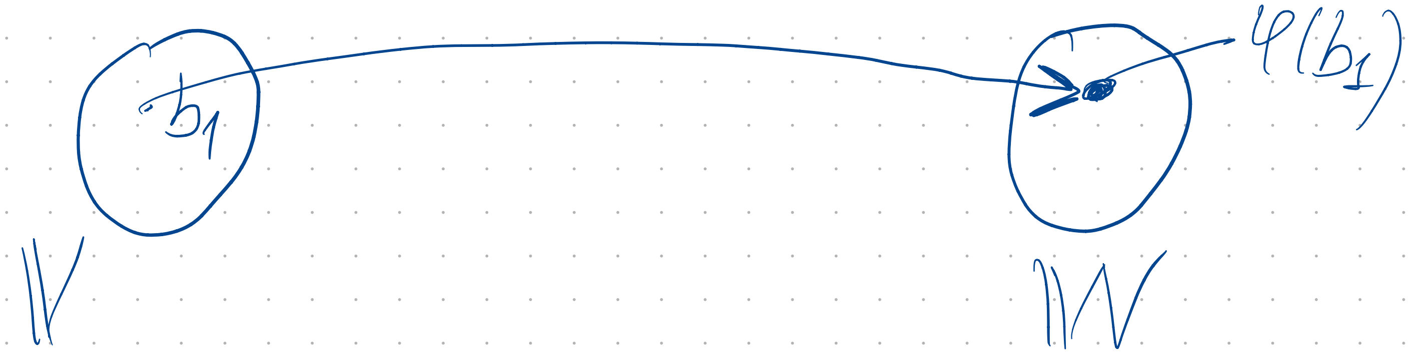
$$X = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \ \varphi(X) = \begin{pmatrix} 13 \\ -5 \end{pmatrix} \qquad X = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \to [X]_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$P_{C\to S}[a]_C = [a]$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 13 \\ 1 & 2 & -5 \end{array}\right)_{-R_1} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 13 \\ 0 & 1 & -18 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} t_2 = -18 \\ t_1 = 31 \end{array} \to [\varphi(X)]_C = \begin{pmatrix} 31 \\ -18 \end{pmatrix}$$

$\checkmark$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 9 & 13 \\ -5 & -8 \end{pmatrix}}_{A_{\varphi,(B,C)}} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{[X]_B} = \underbrace{\begin{pmatrix} 31 \\ -18 \end{pmatrix}}_{[\varphi(X)]_C}$$



$B = \{b_1, b_2\}$ $\qquad\qquad$ $C = \{c_1, c_2\}$

$$\varphi(b_1) = 2c_1 - 2c_2$$

$$\varphi(b_2) = 5c_1 + 1c_2$$

$$\left[\boxed{[\varphi(b_1)]_C} \;\middle|\; \boxed{[\varphi(b_2)]_C} \right] = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[\varphi(b_1)]_C = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$[\varphi(b_2)]_C = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$