Линейная алгебра
Системы линейных уравнений

Глеб Карпов

МНаД ФКН ВШЭ

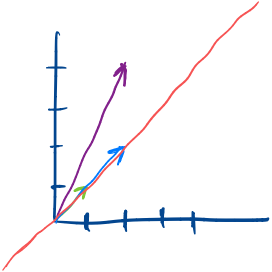
СЛУ для анализа векторов

Линейная оболочка и единственность решения

- Наш взгляд на mat-vec как на линейную комбинацию столбцов матрицы приводит нас к более глубокому понимания СЛУ. Если обозначим столбцы матрицы за $a_1, \dots, a_m$ то тогда:

$$A\mathbf{x} = r \leftrightarrow x_1 a_1 + \dots + x_m a_m = r,$$

  Решить СЛУ теперь означает подобрать коэффициенты для линейной комбинации столбцов матрицы, чтобы получился right-hand side вектор r. Но важным фактором является то, чтобы с помощью векторов $a_1, \dots, a_m$ вообще можно было бы "дотянуться" до вектора r. Иными словами, получаем:



$$\left(\begin{array}{cc|c} \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{2} \\ \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{4} \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -R_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 = r \qquad 0x_1 + 0x_2 = 2$$

СЛУ для анализа векторов

Линейная оболочка и единственность решения

- Наш взгляд на mat-vec как на линейную комбинацию столбцов матрицы приводит нас к более глубокому понимания СЛУ. Если обозначим столбцы матрицы за $a_1, \dots, a_m$ то тогда:

$$A\mathbf{x} = r \leftrightarrow x_1 a_1 + \dots + x_m a_m = r,$$

  Решить СЛУ теперь означает подобрать коэффициенты для линейной комбинации столбцов матрицы, чтобы получился right-hand side вектор r. Но важным фактором является то, чтобы с помощью векторов $a_1, \dots, a_m$ вообще можно было бы "дотянуться" до вектора r. Иными словами, получаем:

-

> **Существование решения**
>
> Для того, чтобы у СЛУ $A\mathbf{x} = r$ существовало хотя бы одно решение, необходимо, чтобы выполнялось:
>
> $$r \in \text{ span } (a_1, \dots, a_m)$$
>
> Иначе, СЛУ называется несовместной (inconsistent). В ступенчатом виде матрицы несовместность системы выражается в виде наличия строчки:
>
> $$[0\ 0\ \dots\ 0 \mid b],\ b \neq 0$$
>
> $0x_1 + \dots + 0x_m = b \neq 0$

Пример: несовместность vs неуникальное решение

inconsistent

$0x_1+0x_2+0x_3=7$

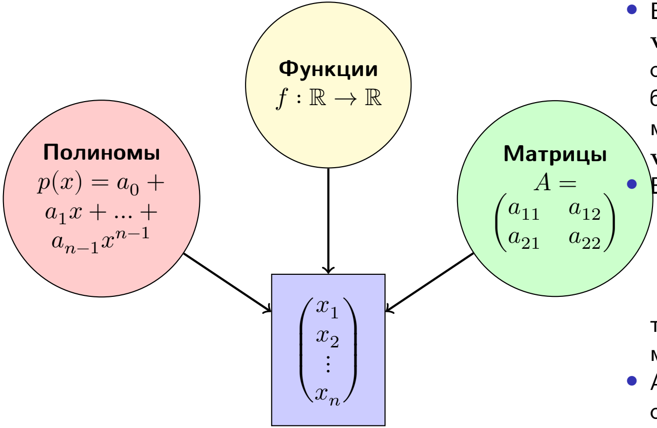
- $\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&0\\2&4&10&0\\1&-2&-3&7\end{array}\right)\begin{array}{l}\\-2R_1\\-R_1\end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&0\\0&4&8&0\\0&\cancel{-2}&-4&7\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \\+\frac{1}{2}R_2\end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&0\\0&4&8&0\\0&0&0&7\end{array}\right)$
- $\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&2\\0&1&4&2\\5&12&23&14\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \\-5R_1\end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&2\\0&1&4&2\\0&2&8&4\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \\-2R_2\end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&2\\0&1&4&2\\0&0&0&0\end{array}\right)$

x_3 free

$$X=\begin{cases}x_1=2-3x_3-2(2-4x_3)\\x_2=2-4x_3\\x_3=t+0\end{cases}=\begin{cases}-2+5x_3\\—//—\\—//—\end{cases}$$

$$X=\begin{pmatrix}-2\\2\\0\end{pmatrix}+x_3\cdot\begin{pmatrix}5\\-4\\1\end{pmatrix}\quad\forall x_3\in\mathbb{R}$$

Reminder: в чем сила?



Линейная алгебра: единый язык для разных объектов

- Если векторное пространство $\mathbb{V}$ имеет базис $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$, то любой вектор $\mathbf{v}$ однозначно определяется своими координатами α_k в этом базисе. Если мы упакуем α_k в вектор из $\mathbb{R}^n$, то можем оперировать им вместо оперирования над $\mathbf{v}$.
- Если $\mathbf{v} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mathbf{v}_k$ и $\mathbf{w} = \sum_{k=1}^{n} \beta_k \mathbf{v}_k$, то

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mathbf{v}_k + \sum_{k=1}^{n} \beta_k \mathbf{v}_k = \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k + \beta_k)\, \mathbf{v}_k$$

  т.е. вместо сложения двух оригинальных векторов, можно сложить векторы координат.
- Аналогично, чтобы получить $\alpha\mathbf{v}$, можно умножить столбец координат $\mathbf{v}$ на α и сразу получить координаты вектора $\alpha\mathbf{v}$.

СЛУ как способ исследовать наборы векторов

- Для отдельного рассмотрения можно вынести системы однородных линейных уравнений вида $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$
- В интерпретации линейной комбинации столбцов такие уравнения внезапно напоминают нам про возможность получения нулевого вектора:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0} \leftrightarrow x_1 a_1 + \ldots + x_m a_m = \mathbf{0},$$

Если единственное решение - тривиальный вектор $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, то набор перед нами линейно независимая группа векторов в столбцах матрицы. Иначе - линейно зависимая.

Утверждение

Пусть у нас есть набор векторов $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m \in \mathbb{R}^n$, и пусть $A = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m]$ — это матрица размера $n \times m$ со столбцами $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$. Тогда

1. Система $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ линейно независима тогда и только тогда, когда ступенчатая форма матрицы A имеет ведущий элемент в каждом столбце;
2. Линейная оболочка системы $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ совпадает с $\mathbb{R}^n$ тогда и только тогда, когда ступенчатая форма матрицы A имеет ведущий элемент в каждой строке;
3. Система $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ является базисом в $\mathbb{R}^n$ тогда и только тогда, когда ступенчатая форма матрицы A имеет ведущий элемент в каждом столбце и в каждой строке.

Примеры

- Используя переход в координатную форму, сделать выводы про следующие наборы векторов: про их линейную оболочку и характер линейной зависимости.

1. (3) $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right\}$

$$\begin{pmatrix}1&2\\1&1\end{pmatrix}_{-R_1} \sim \begin{pmatrix}1&2\\0&-1\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c}1&2&0\\0&-1&0\end{array}\right) \quad \begin{array}{l}x_1=0\\x_2=0\end{array} \quad X=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&4\\1&1&6\end{pmatrix}_{-R_1} \sim \begin{pmatrix}1&2&4\\0&-1&2\end{pmatrix}$$

Free

Лин. зав. система

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&4&0\\0&-1&2&0\end{array}\right) \quad \begin{cases}x_1=-8x_3\\x_2=2x_3\\x_3=t, \text{ (Free)}\end{cases} \quad X=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}+x_3\cdot\begin{pmatrix}-8\\2\\1\end{pmatrix}$$

$\forall x_3\in\mathbb{R}$

Примеры

$Ax=0$

1) $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ $\quad x_1 = 0, \quad x_2 = 0$

2) $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 7 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ -R_1 \\ -R_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 7 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ -R_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{7} \end{array}\right)$

inconsistent

- Используя переход в координатную форму, сделать выводы про следующие наборы векторов: про их линейную оболочку и характер линейной зависимости.

2.)

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ -R_1 \\ -R_1 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 0 & \cancel{-1} \end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ -R_2 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Примеры

③
$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ -R_1 \\ -R_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ -R_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$x_1 = 4 - 2x_2 = 2$$
$$x_2 = 1$$

- Используя переход в координатную форму, сделать выводы про следующие наборы векторов: про их линейную оболочку и характер линейной зависимости.

$$X = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Примеры

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 & 1 \\ -3 & 5 & 5 & 0 \\ 5 & -7 & -6 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ +3R_1 \\ -5R_1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 & 1 \\ 0 & -4 & -7 & 3 \\ 0 & \cancel{8} & 14 & -6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ +2R_2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 & 1 \\ 0 & -4 & -7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Используя переход в координатную форму, сделать выводы про следующие наборы векторов: про их линейную оболочку и характер линейной зависимости.
  1. $1 - 3t + 5t^2, -3 + 5t - 7t^2, -4 + 5t - 6t^2, 1 - t^2$
  2. $5t + t^2, 1 - 8t - 2t^2, -3 + 4t + 2t^2, 2 - 3t$

1. $\mathbb{R}[t, 2]$, $S = \{1, t, t^2\}$

$$[v_1] = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad [v_2] = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix}, \quad [v_3] = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}, \quad [v_4] = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Примеры

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 2 \\ 5 & -8 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 \\ 5 & -8 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -5R_1 \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -6 & -3 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -\frac{1}{2}R_2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3.5 \end{pmatrix}$$

- Используя переход в координатную форму, сделать выводы про следующие наборы векторов: про их линейную оболочку и характер линейной зависимости.
  1. $1 - 3t + 5t^2, -3 + 5t - 7t^2, -4 + 5t - 6t^2, 1 - t^2$
  2. $5t + t^2, 1 - 8t - 2t^2, -3 + \cancel{4t} + 2t^2, 2 - 3t$

$S = \{1, t, t^2\}$

$B = \{5t + t^2, 1 - 8t - 2t^2, 2 - 3t\}$

Basis

Слайд для записей