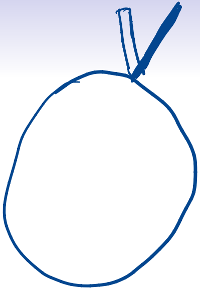
Линейная алгебра

Базис векторного пространства. Линейные отображения.

Глеб Карпов

МНаД ФКН ВШЭ

Базис



Базис

Определение

- Набор векторов $v_1, \dots, v_n$ из $\mathbb{V}$ называется базисом пространства V тогда и только тогда, когда любой вектор $x \in \mathbb{V}$ может быть уникально представлен в форме линейной комбинации:

$$x = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n.$$

- Соответствующие уникальные коэффициенты $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ мы называем координатами вектора x в базисе $(v_1, \dots, v_n)$.

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ — базис в $\mathbb{R}^3$

Базис

Определение

- Набор векторов $v_1, \dots, v_n$ из $\mathbb{V}$ называется базисом пространства V тогда и только тогда, когда любой вектор $x \in \mathbb{V}$ может быть уникально представлен в форме линейной комбинации:

$$x = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n.$$

- Соответствующие уникальные коэффициенты $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ мы называем координатами вектора x в базисе $(v_1, \dots, v_n)$.
- Немного иначе: набор векторов $v_1, \dots, v_n$ из $\mathbb{V}$ называется базисом пространства V тогда и только тогда, когда этот набор векторов линейно независим и $\text{span}(v_1, \dots, v_n) = \mathbb{V}$, то есть мы можем 'дотянуться' до любого элемента из $\mathbb{V}$.

$\mathbb{R}^3$ $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ $\quad$ span $= \mathbb{R}^2$

$(5, 2)$

Базис. Примеры.

$\mathbb{R}^2$ $\qquad x = \begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$S = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

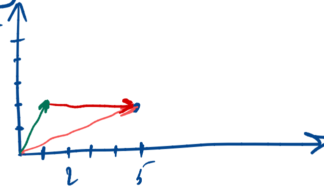
$$\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$$

$$[x]_S = \begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$$

$$B = \left\{\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-8\\0\end{pmatrix}\right\}$$

$$\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix} + \left(-\frac{1}{2}\right)\begin{pmatrix}-8\\0\end{pmatrix}$$

$$[x]_B = \begin{pmatrix}0.5\\-0.5\end{pmatrix}$$



$$\underset{b_1}{\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}} = 1\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}-8\\0\end{pmatrix}$$

$$[b_1]_B = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$S = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\} \qquad \mathbb{R}^4$$

Базис. Примеры.

$\mathbb{R}[x,2]$

$$F(x) = 2x^2 - 5x + 7 \qquad S = \{x^2, x, 1\}$$

$$F(x) = 2\cdot x^2 + (-5)x + 7\cdot 1 \qquad [F(x)]_S = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$B = \{4x^2+2x,\ 6x,\ 14\}$$

$$F(x) = \frac{1}{2}(4x^2+2x) + (-1)(6x) + \frac{1}{2}(14)$$

$$[F(x)]_B = \begin{pmatrix} 0.5 \\ -1 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

Symm $\mathbb{R}^{2\times 2}$

Базис. Примеры.

$$A^T = A$$

$$S=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right\}$$

$$\begin{pmatrix}2&4\\4&1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}3&5\\5&2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0&-10^6\\-10^6&1\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}10&4\\4&-2\end{pmatrix}=10\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+(-2)\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$

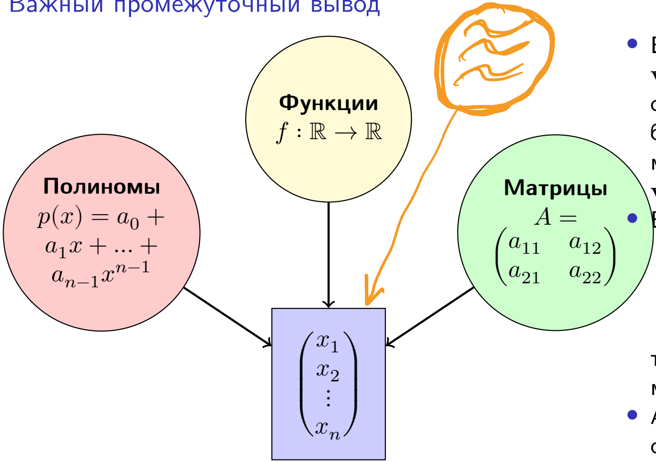
$$[A]_S=\begin{pmatrix}10\\-2\\4\end{pmatrix}$$

$\mathbb{R}^{2\times 2}$

$$S=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$$

Базис.

Важный промежуточный вывод



Линейная алгебра: единый язык для разных объектов

- Если векторное пространство $\mathbb{V}$ имеет базис $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$, то любой вектор $\mathbf{v}$ однозначно определяется своими координатами α_k в этом базисе. Если мы упакуем α_k в вектор из $\mathbb{R}^n$, то можем оперировать им вместо оперирования над $\mathbf{v}$.
- Если $\mathbf{v} = \sum_{k=1}^n \alpha_k \mathbf{v}_k$ и $\mathbf{w} = \sum_{k=1}^n \beta_k \mathbf{v}_k$, то

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = \sum_{k=1}^n \alpha_k \mathbf{v}_k + \sum_{k=1}^n \beta_k \mathbf{v}_k = \sum_{k=1}^n (\alpha_k + \beta_k)\, \mathbf{v}_k$$

  т.е. вместо сложения двух оригинальных векторов, можно сложить векторы координат.
- Аналогично, чтобы получить $\alpha\mathbf{v}$, можно умножить столбец координат $\mathbf{v}$ на α и сразу получить координаты вектора $\alpha\mathbf{v}$.