

# Линейная алгебра

## СЛУ для анализа векторов

Глеб Карпов

МНаД ФКН ВШЭ

## СЛУ для анализа векторов

### Линейная оболочка и единственность решения

- Наш взгляд на mat-vec как на линейную комбинацию столбцов матрицы приводит нас к более глубокому пониманию СЛУ. Если обозначим столбцы матрицы за  $a_1, \dots, a_m$  то тогда:

$$Ax = r \leftrightarrow x_1 a_1 + \dots + x_m a_m = r,$$

Решить СЛУ теперь означает подобрать коэффициенты для линейной комбинации столбцов матрицы, чтобы получился right-hand side вектор  $r$ . Но важным фактором является то, чтобы с помощью векторов  $a_1, \dots, a_m$  вообще можно было бы “дотянуться” до вектора  $r$ . Иными словами, получаем:

## СЛУ для анализа векторов

### Линейная оболочка и единственность решения

- Наш взгляд на `mat-vec` как на линейную комбинацию столбцов матрицы приводит нас к более глубокому пониманию СЛУ. Если обозначим столбцы матрицы за  $a_1, \dots, a_m$  то тогда:

$$Ax = r \leftrightarrow x_1 a_1 + \dots + x_m a_m = r,$$

Решить СЛУ теперь означает подобрать коэффициенты для линейной комбинации столбцов матрицы, чтобы получился `right-hand side` вектор  $r$ . Но важным фактором является то, чтобы с помощью векторов  $a_1, \dots, a_m$  вообще можно было бы “дотянуться” до вектора  $r$ . Иными словами, получаем:

#### **i** Существование решения

Для того, чтобы у СЛУ  $Ax = r$  существовало хотя бы одно решение, необходимо, чтобы выполнялось:

$$r \in \text{span}(a_1, \dots, a_m)$$

Иначе, СЛУ называется несовместной (`inconsistent`). В ступенчатом виде матрицы несовместность системы выражается в виде наличия строки:

$$[0 \ 0 \ \dots \ 0 \mid b], \ b \neq 0$$

## Пример: несовместность vs неуникальное решение

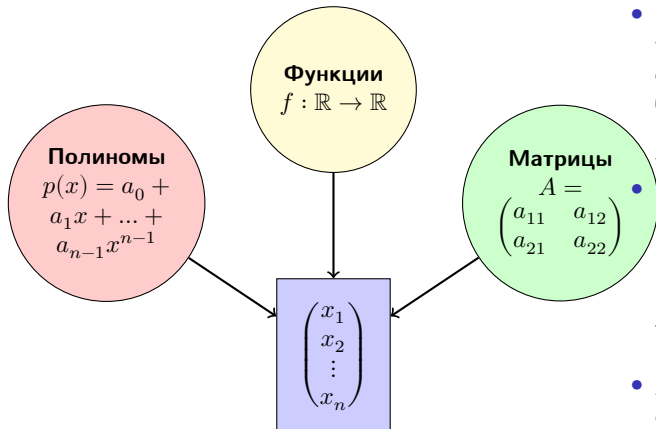
- $\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 10 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & 7 \end{array} \right)$

## Пример: несовместность vs неуникальное решение

- $\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 10 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & 7 \end{array} \right)$

- $\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 5 & 12 & 23 & 14 \end{array} \right)$

## Reminder: в чем сила?



**Линейная алгебра: единый язык для разных объектов**

- Если векторное пространство  $V$  имеет базис  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ , то любой вектор  $\mathbf{v}$  однозначно определяется своими координатами  $\alpha_k$  в этом базисе. Если мы упакуем  $\alpha_k$  в вектор из  $\mathbb{R}^n$ , то можем оперировать им вместо оперирования над  $\mathbf{v}$ .

- Если  $\mathbf{v} = \sum_{k=1}^n \alpha_k \mathbf{v}_k$  и  $\mathbf{w} = \sum_{k=1}^n \beta_k \mathbf{v}_k$ , то

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = \sum_{k=1}^n \alpha_k \mathbf{v}_k + \sum_{k=1}^n \beta_k \mathbf{v}_k = \sum_{k=1}^n (\alpha_k + \beta_k) \mathbf{v}_k$$

т.е. вместо сложения двух оригинальных векторов, можно сложить векторы координат.

- Аналогично, чтобы получить  $\alpha \mathbf{v}$ , можно умножить столбец координат  $\mathbf{v}$  на  $\alpha$  и сразу получить координаты вектора  $\alpha \mathbf{v}$ .

## СЛУ как способ исследовать наборы векторов

- Для отдельного рассмотрения можно вынести системы однородных линейных уравнений вида  $Ax = 0$

### **i** Утверждение

Пусть у нас есть набор векторов  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m \in \mathbb{R}^n$ , и пусть  $A = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m]$  — это матрица размера  $n \times m$  со столбцами  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m$ . Тогда

1. Система  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m$  линейно независима тогда и только тогда, когда ступенчатая форма матрицы  $A$  имеет ведущий элемент в каждом столбце;
2. Линейная оболочка системы  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m$  совпадает с  $\mathbb{R}^n$  тогда и только тогда, когда ступенчатая форма матрицы  $A$  имеет ведущий элемент в каждой строке;
3. Система  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m$  является базисом в  $\mathbb{R}^n$  тогда и только тогда, когда ступенчатая форма матрицы  $A$  имеет ведущий элемент в каждом столбце и в каждой строке.

## СЛУ как способ исследовать наборы векторов

- Для отдельного рассмотрения можно вынести системы однородных линейных уравнений вида  $Ax = 0$
- В интерпретации линейной комбинации столбцов такие уравнения внезапно напоминают нам про возможность получения нулевого вектора:

$$Ax = 0 \leftrightarrow x_1 a_1 + \dots + x_m a_m = 0,$$

Если единственное решение - тривиальный вектор  $x = 0$ , то набор перед нами линейно независимая группа векторов в столбцах матрицы. Иначе - линейно зависимая.

### **i** Утверждение

Пусть у нас есть набор векторов  $v_1, v_2, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n$ , и пусть  $A = [v_1, v_2, \dots, v_m]$  — это матрица размера  $n \times m$  со столбцами  $v_1, v_2, \dots, v_m$ . Тогда

1. Система  $v_1, v_2, \dots, v_m$  линейно независима тогда и только тогда, когда ступенчатая форма матрицы  $A$  имеет ведущий элемент в каждом столбце;
2. Линейная оболочка системы  $v_1, v_2, \dots, v_m$  совпадает с  $\mathbb{R}^n$  тогда и только тогда, когда ступенчатая форма матрицы  $A$  имеет ведущий элемент в каждой строке;
3. Система  $v_1, v_2, \dots, v_m$  является базисом в  $\mathbb{R}^n$  тогда и только тогда, когда ступенчатая форма матрицы  $A$  имеет ведущий элемент в каждом столбце и в каждой строке.



## Примеры

- Используя переход в координатную форму, сделать выводы про следующие наборы векторов: про их линейную оболочку и характер линейной зависимости.

## Примеры

- Используя переход в координатную форму, сделать выводы про следующие наборы векторов: про их линейную оболочку и характер линейной зависимости.
  1.  $1 - 3t + 5t^2, -3 + 5t - 7t^2, -4 + 5t - 6t^2, 1 - t^2$

## Примеры

- Используя переход в координатную форму, сделать выводы про следующие наборы векторов: про их линейную оболочку и характер линейной зависимости.
  1.  $1 - 3t + 5t^2, -3 + 5t - 7t^2, -4 + 5t - 6t^2, 1 - t^2$
  2.  $5t + t^2, 1 - 8t - 2t^2, -3 + 4t + 2t^2, 2 - 3t$

## Слайд для записей