ФКН ВШЭ, МНаД.
Линейная алгебра.
Лист задач 2. Базисы и координаты.

1. Найдите координатный вектор для:

   (a) Вектора $x = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ в базисе $\mathcal{B} = \{b_1, b_2\}$ пространства $\mathbb{R}^2$, если $b_1 = \begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix}3\\8\end{pmatrix}$.

   (b) Вектора $p(x) = 4 + 5x$ в базисе $U = \{u_1, u_2\}$ пространства $\mathbb{R}[x, 1]$, если $u_1 = 1 + 2x$, $u_2 = -2 - 3x$.

   Hint: нужно составить и решить две системы линейных уравнений:

   $$P_{B\to S}[x]_B = [x]_S \quad \text{и} \quad P_{U\to S}[p(x)]_U = [p(x)]_S$$

2. В пространстве $\mathbb{R}^2$ задан базис $B = \{b_1, b_2\}$, где $b_1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

   (a) Найдите матрицу перехода $P_{B\to S}$ от базиса B к стандартному базису S пространства $\mathbb{R}^2$.

   (b) Найдите матрицу перехода $P_{S\to B}$ от стандартного базиса S к базису B.

   (c) Убедитесь, что эти матрицы являются обратными друг для друга.

3. В пространстве $\mathbb{R}^2$ задан базис $\mathcal{B} = \{b_1, b_2\}$, где $b_1 = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, а также базис $\mathcal{C} = \{c_1, c_2\}$, где $c_1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $c_2 = \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$.

   Найдите:

   (a) Найдите матрицы перехода $P_{B\to S}$ и $P_{S\to B}$ от базиса $\mathcal{B}$ к стандартному базису и обратно.

   (b) Найдите матрицы перехода $P_{C\to S}$ и $P_{S\to C}$ от базиса $\mathcal{C}$ к стандартному базису и обратно.

   Далее, воспользуемся знанием, что $P_{B\to S}[x]_B = [x]_S = P_{C\to S}[x]_C$ (на этом моменте спросите себя, понимаете ли вы, почему это так). Примените трюк с обратной матрицей и найдите матрицы перехода от базиса $\mathcal{B}$ к базису $\mathcal{C}$ и обратно, то есть $P_{B\to C}$ и $P_{C\to B}$. Приведите пример, как это работает, на конкретно взятом векторе.

4. Пусть $\mathbb{V}$ — множество всех верхнетреугольных (у которых элементы под главной диагональю всегда равны нулю) матриц размера 2×2. Множество $\mathbb{V}$ является векторным пространством, и у него есть, например, стандартный базис:

   $$\mathcal{A} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

   Найдите координаты элемента $D = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ относительно стандартного базиса $\mathcal{A}$. Покажите, что это работает в виде линейной комбинации базисных векторов и координат, *т.е.* как мы обсуждали, что если $\{v_1, \ldots, v_n\}$ — базис, то $\forall x$ из векторного пространства $x = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$.

   Но также могут быть и другие базисы! Пусть:

   $$\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right)$$

   является другим базисом для $\mathbb{V}$. Постройте матрицу $P_{B\to A}$ перехода от базиса $\mathcal{B}$ к базису $\mathcal{A}$. Найдите координатный столбец $[D]_{\mathcal{B}}$, т.е. координаты элемента D относительно базиса $\mathcal{B}$.